机密★启用前

五市十校教研教改共同体·2024届高三12月大联考

数　学

命题单位：主命题：南县一中　　审题单位：天壹名校联盟审题组
副命题：岳阳十四中
岳阳十五中

本试卷共4页。全卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷和答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应的答案标号涂黑，如有改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案；回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x|x^2-2x-3=0\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$

A. $\{-1,3\}$　　B. $\{-2,0,1\}$　　C. $\{-1,2,3\}$　　D. $\{-2,0,1,2,3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z-2\mathrm{i}|=\sqrt{3}$，z 在复平面内对应的点为 (x,y)，则

A. $(x-2)^2+y^2=\sqrt{3}$　　B. $x^2+(y-2)^2=\sqrt{3}$

C. $x^2+(y-2)^2=3$　　D. $x^2+(y+2)^2=3$

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|$，且 $\boldsymbol{a}\perp(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

4. 已知曲线 $y=m\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $(1,m\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y=2x+t$，则

A. $m=\mathrm{e}^{-1},t=-1$　　B. $m=\mathrm{e}^{-1},t=1$　　C. $m=\mathrm{e},t=-1$　　D. $m=\mathrm{e},t=1$

5. 在平面直角坐标系中，角 α 与 β 的顶点均为坐标原点 O，始边均为 x 轴的非负半轴. 若角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，将 OP 绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后与角 β 的终边重合，则 $\cos\beta=$

A. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$　　B. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$　　C. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$　　D. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

6. 洞庭湖生态保护治理是推动产业绿色转型升级，推进新时代洞庭湖生态经济区高质量发展的重要举措. 某镇落实该举措后，大力发展特色产业，预计2023年平均每户将增加收入4000元，以后每年度平均每户较上一年增加的收入以10%的增速增长，则该镇每年度平均每户较上一年增加的收入开始超过12000元的年份大约是(参考数据：$\ln 3\approx1.10$，$\ln 10\approx2.30$，$\ln 11\approx2.40$)

A. 2033年　　B. 2034年　　C. 2035年　　D. 2036年

7. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_7=-\frac{\pi}{8}$，设函数$f(x)=\cos^4 x-\sin^4 x+2\sin x\cos x+2$，记$y_n=f(a_n)$，则数列$\{y_n\}$的前13项和为

A. 0　　B. 12　　C. 24　　D. 26

8. 设函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，其导函数为$f'(x)$，且满足$f(x)>f'(x)+1$，$f(2)=e^2+1$，则不等式$e^{-x}f(x)\geqslant e^{-x}+1$的解集是

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $[-1,2]$　　D. $[2,+\infty)$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$，则

A. $f(x)$为奇函数　　B. $x=1$不是函数$f(x)$的极值点

C. $f(x)$在$[-1,+\infty)$上单调递增　　D. $f(x)$存在两个零点

10. 已知$a>0$，$b>0$，直线l_1：$x+(a-2)y+1=0$，l_2：$bx+y-2=0$，且$l_1\perp l_2$，则

A. $0<ab\leqslant 1$　　B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2$　　C. $a^2+b^2<2$　　D. $\frac{b}{a}+\frac{2}{b}\geqslant 3$

11. 已知偶函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)-\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期为$\pi$，将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到函数$y=g(x)$的图象，则下列说法正确的是

A. $g(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

B. 不等式$g(x)\geqslant 1$的解集为$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

C. 若方程$g(x)=\frac{2}{3}$在区间$\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$的解为$x_1$，$x_2$，则$\sin(x_1+x_2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象与直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的交点个数为3

12. 已知圆锥SO的侧面积为3π，母线$SA=l$，底面圆的半径为r，点P满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PS}$，则

A. 当$r=1$时，圆锥SO的体积为$\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

B. 当$r=\frac{3}{2}$时，过顶点S和两母线的截面三角形的最大面积为$\frac{3\sqrt{7}}{4}$

C. 当$r=1$时，从点A绕圆锥一周到达点P的最短长度为$\sqrt{13}$

D. 当$l=3$时，棱长为$\sqrt{2}$的正四面体在圆锥SO内可以任意转动

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_3-a_1=3$，$a_4-a_2=6$，则$S_5=$________.

14. 已知圆C的圆心与抛物线$y^2=8x$的焦点关于直线$y=x$对称，直线$2x-y-3=0$与圆C相交于A，B两点，且$|AB|=2\sqrt{3}$，则圆C的方程为________.

15. 已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)=f(2-x)$，当$-1\leqslant x<0$时，$f(x)=\log_2(-x)$，则函数$g(x)=f(x)+2$在区间$(-1,8)$内的所有零点之和为________.

16. 在平面四边形$ABCD$中，$AB=AD=3\sqrt{2}$，$BC=CD=3$，$BC\perp CD$，将$\triangle ABD$沿BD折起，使点A到达点A'，且$A'C=3\sqrt{3}$，则四面体$A'-BCD$的外接球O的体积为________；若点E在线段BD上，且$BD=4BE$，过点E作球O的截面，则所得的截面圆中面积最小的圆的半径为________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.(本小题满分 10 分)

在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,向量$\boldsymbol{m}=(b-a,c)$,$\boldsymbol{n}=(\sin B-\sin C,\sin A+\sin B)$,且$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$.

(1)求A;

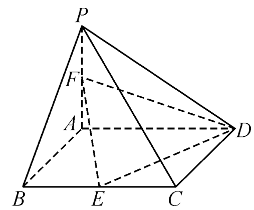
(2)若$\triangle ABC$的外接圆半径为 2,且$\cos B\cos C=-\dfrac{1}{6}$,求$\triangle ABC$的面积.

18.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥$P-ABCD$中,底面$ABCD$为矩形,$PA\perp AB$,$PA=AB=1$,$AD=2$,E,F分别是BC,PA的中点.

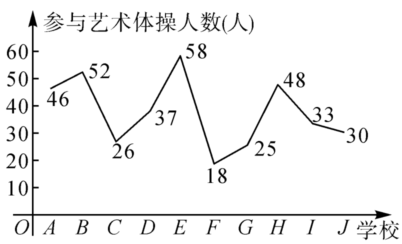
(1)求证:$EF/\!/$平面PCD;

(2)若平面$PAB\perp$平面$ABCD$,求直线PD与平面DEF所成角的余弦值.



19.(本小题满分 12 分)

杭州第 19 届亚运会后,多所高校掀起了体育运动的热潮. 为了深入了解学生在“艺术体操”活动中的参与情况,随机选取了 10 所高校进行研究,得到数据绘制成如下的折线图:



(1)若“艺术体操”参与人数超过 35 人的学校可以作为“基地校”,现在从这 10 所学校中随机选出 3 所,记可作为“基地校”的学校个数为ξ,求ξ的分布列和数学期望;

(2)现有一个“艺术体操”集训班,对“支撑、手倒立、手翻”这 3 个动作技巧进行集训,且在集训中进行了多轮测试. 规定:在一轮测试中,这 3 个动作中至少有 2 个动作达到“优秀”,则该轮测试记为“优秀”. 在集训测试中,某同学 3 个动作中每个动作达到“优秀”的概率均为$\dfrac{2}{5}$,每个动作及每轮测试互不影响. 如果该同学在集训测试中要想获得“优秀”的次数的平均值达到 8 次,那么理论上至少要进行多少轮测试?

20.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=5$,前 n 项和为S_n,且$S_{n+1}=3S_n+2n+5(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)证明:数列$\{a_n+1\}$是等比数列;

(2)令$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,求函数$f(x)$在$x=1$处的导数$f'(1)$.

21.(本小题满分 12 分)

已知动点$M(x,y)$与定点$F(2,0)$的距离和M到定直线$l:x=6$的距离的比是常数$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(1)求动点M的轨迹;

(2)过点F的直线l'与点M的轨迹相交于A,B两点,与圆$O:x^2+y^2=8$相交于P,Q两点,求$|AB|\cdot|PQ|^2$的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2-x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若函数$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上为增函数,求实数$a$的最大值;

(2)若$f(x)$有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$,且不等式$\dfrac{x_2^m}{\mathrm{e}}>\dfrac{\mathrm{e}^m}{x_1}$恒成立,求正数$m$的取值范围.(其中$\mathrm{e}=2.71828\cdots$为自然对数的底数)