2024届高三级12月“六校”(清中、河中、北中、惠中、阳中、茂中)联合摸底考试

数 学 试 题

考生注意：

1. 满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

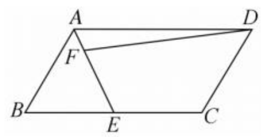
1. 已知集合 $A=\{x|(x-1)^2<2\}$，$B=\{-1,0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})^2=1-\mathrm{i}$，则 $\bar{z}$ 的虚部为

A. $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{1}{2}$

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. 若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{DF}+n\overrightarrow{AE}$，则 $m-n=$



A. $-\frac{5}{6}$　　B. $-\frac{3}{8}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

4. 若函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域为 $[-\frac{1}{2},1]$，则 ω 的最小值为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

5. 杨辉是我国南宋末年一位杰出的数学家，在他著的《详解九章算法》一书中，画了一张表示二项式 $(a+b)^n(n=1,2,3,\cdots)$ 展开后的系数构成的三角形数阵，称作“开方作法本源”，这就是著名的“杨辉三角”，它比西方的“帕斯卡三角形”早了393年. 在“杨辉三角”中，从第2行开始，除1以外，其他每一个数值是它上面的两个数值之和，该三角形数阵开头几行如图所示. 某行中只有一项最大，且为252，该行是

A. 第12行
B. 第11行
C. 第10行
D. 第9行

第0行　1
第1行　1　1
第2行　1　2　1
第3行　1　3　3　1
第4行　1　4　6　4　1
第5行　1　5　10　10　5　1

1
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

6. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=(\frac{1}{2})^n-m$，则"$m=1$"是"$\{a_n\}$是等比数列"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知正数a,b,c满足$2\,023^a=2\,024$，$2\,024^b=2\,023$，$e^c=2$，下列说法正确的是

A. $\log_a c>\log_b c$　　B. $\log_c a>\log_c b$　　C. $a^c<b^c$　　D. $c^a<c^b$

8. 过双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点$F$作渐近线的垂线，垂足为$H$，点$O$为坐标原点，若$\sin\angle HOF>\sin\angle HFO$，又直线$y=2x$与双曲线无公共点，则双曲线$C$的离心率的取值范围为

A. $(\sqrt{2},\sqrt{5}]$　　B. $(\sqrt{2},+\infty)$　　C. $(1,\sqrt{5})$　　D. $(\sqrt{2},\sqrt{5})$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分。

9. 下列命题中是真命题的有

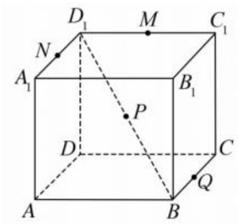
A. 将A,B,C三种个体按3∶1∶2的比例分层抽样调查，如果抽取的A个体数为9，则样本容量为30

B. 一组数据1，2，3，3，4，5的平均数、众数、中位数相同

C. 若甲组数据的方差为5，乙组数据为5，6，9，10，5，则这两组数据中较稳定的是甲

D. 一组数据6，5，4，3，3，3，2，2，2，1的85%分位数为5

10. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M,N,P,Q分别是线段C_1D_1，A_1D_1，BD_1，BC的中点，则下面四个结论正确的为



A. MN∥平面APC

B. B_1Q∥平面ADD_1A_1

C. A,P,M三点共线

D. 平面MNQ∥平面$ABCD$

11. 已知e是自然对数的底数，函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)$是$f(x)$的导函数，且$\frac{f(x)}{x}+\ln x\cdot f'(x)>0$，则

A. $f(\frac{1}{e})+f(e)>0$　　B. $f(\frac{1}{e})<0$　　C. $f(e)>0$　　D. $f(1)=0$

12. 已知圆$C:x^2+y^2=4$，直线l过点$P(-2,4)$，若将圆C向上平移4个单位长度，再向右平移3个单位长度得到圆C'，则下列说法正确的有

A. 若直线l与圆C相切，则直线l的方程为$3x+4y-10=0$

B. 若直线l与圆C交于A,B两点，且$\triangle ABC$的面积为2，则直线l的方程为$x+y-2=0$或$7x+y+10=0$

C. 若过点$(2,0)$的直线l'与圆C交于M,N两点，则当$\triangle CMN$面积最大时，直线l'的斜率为1或-1

D. 若Q是x轴上的动点，QR,QS分别切圆C'于R,S两点，则直线RS恒过定点$(3,3)$

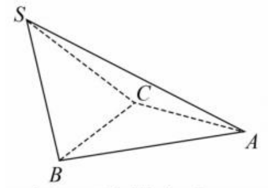
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知实数x,y满足$x^2+2y^2-2xy=4$，则xy的最大值为________.

14. 设抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点$A(0,2)$，若线段FA的中点B在抛物线上，则点B到抛物线准线的距离为________.

15. 若函数 $f(x)=\dfrac{2^x+b}{2^x+a}(a,b\in\mathbf{R})$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(mx^2)+f(1-mx)>f(0)$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 m 的取值范围为________.

16. 如图所示，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 与$\triangle SBC$ 都是边长为 1 的正三角形，二面角 $A-BC-S$ 的大小为$\dfrac{2\pi}{3}$，若 S,A,B,C 四点都在球O 的表面上，则球 O 的表面积为________.



四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

记$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a\cos B=c\cos A+a\cos C$.

(1)证明：$b=a\cos B$；

(2)若 $\cos B=\dfrac{3}{4}$，$c=2$，求$\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

已知正项数列$\{a_n\}$满足 $a_{100}=\dfrac{1}{201}$，且 $a_{n+1}^2+2a_{n+1}^2a_n=a_n^2-2a_{n+1}a_n^2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

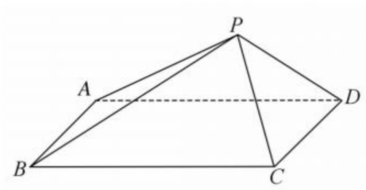
(2)设 $b_n=(-1)^n(\dfrac{1}{a_n}+2^n)$，求数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

19. (本小题满分 12 分)

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AB=2$，$PA=PB=BC=\sqrt{10}$，$PD=PC=\sqrt{2}$.

(1)求证：平面 $PAB\perp$平面 PCD；

(2)求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值.



官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

20.(本小题满分 12 分)

食品安全问题越来越受到人们的重视,某超市在某种蔬菜进货前,要求食品安检部门对每箱蔬菜进行三轮各项指标的综合检测,只有三轮检测都合格,蔬菜才能在该超市销售.已知每箱这种蔬菜第一轮检测不合格的概率为$\frac{1}{7}$,第二轮检测不合格的概率为$\frac{1}{8}$,第三轮检测合格的概率为$\frac{8}{9}$,每轮检测只有合格与不合格两种情况,且各轮检测是否合格相互之间没有影响.

(1)求每箱这种蔬菜不能在该超市销售的概率;

(2)如果这种蔬菜能在该超市销售,则每箱可获利 400 元,如果不能在该超市销售,则每箱亏损 200 元,现有 4 箱这种蔬菜,求这 4 箱蔬菜总收益的分布列.

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$,椭圆的左、右顶点分别为 A_1、A_2,点 G 在椭圆上(异于 A_1,A_2),且 $k_{GA_1}\cdot k_{GA_2}=-\frac{3}{4}$.

(1)求椭圆的标准方程;

(2)若点 P 为直线 $x=4$ 上的动点,过点 P 作椭圆的两条切线,切点分别为 M,N,证明直线 MN 经过定点 Q,并求出定点 Q 的坐标.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x+\ln x,g(x)=\mathrm{e}^x$.

(1)求函数 $H(x)=f(x)-xg(x)$的最大值;

(2)当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$时,证明:$\frac{2xg(x-1)}{f(x)-(x-1)}\geqslant x^2+1$.

4
官方微信公众号:zizzsw　咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com　微信客服:zizzs2018

2024届高三级12月“六校”(清中、河中、北中、惠中、阳中、茂中)联合摸底考试·数学
参考答案、提示及评分细则

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	A	C	C	D	A

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合要求,全部选对的得5分,选对但不全的得2分,有选错的得0分。

题号	9	10	11	12
答案	BD	AB	AC	BCD

1. C　由题意可知 $A=\{x\mid 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}\}$,$B=\{-1,0,1,2,3\}$,所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$. 故选 C.

2. D　$\because z(1+\mathrm{i})^2=1-\mathrm{i}$,$\therefore z=\frac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}=\frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}{2\mathrm{i}^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$,$\therefore \bar{z}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$,即$\bar{z}$的虚部为$\frac{1}{2}$. 故选 D.

3. B　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD})=\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DF})=\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}+\frac{7}{8}\overrightarrow{AE}$,所以 $m=\frac{1}{2}$,$n=\frac{7}{8}$,则 $m-n=-\frac{3}{8}$. 故选 B.

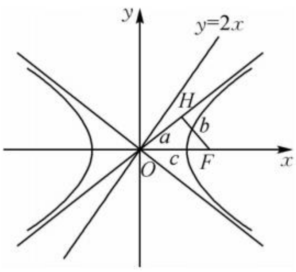
4. A　$\because 0\leqslant x\leqslant\pi$,$\therefore -\frac{\pi}{6}\leqslant\omega x-\frac{\pi}{6}\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{6}$,而 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{2},1]$,$f(0)=\sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$,$\therefore \frac{\pi}{2}\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,解得 $\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{4}{3}$,又 $\omega>0$,ω 的最小值为$\frac{2}{3}$. 故选 A.

5. C　因为某行中只有一项最大,且为252,所以行数 n 为偶数,因为 $C_{10}^5=252$,所以 $n=10$,故选 C.

6. C　当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=\frac{1}{2}-m$,当 $n>1$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}=-\frac{1}{2^n}$,若 $m=1$,则 $a_1=\frac{1}{2}-m=-\frac{1}{2}$,$a_2=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$,$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$,当 $n>1$ 时,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{2^{n+1}}\times(-\frac{2^n}{1})=\frac{1}{2}$,数列$\{a_n\}$是等比数列;若数列$\{a_n\}$是等比数列,$a_n=-\frac{1}{2^n}$,$a_1=-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-m$,$m=1$,所以是充要条件. 故选 C.

7. D　$\because 2\ 023^a=2\ 024$,$2\ 024^b=2\ 023$,$e^c=2$,$\therefore a=\log_{2\,023}2\ 024>1$,$b=\log_{2\,024}2\ 023<1$,$c=\ln 2<1$,$\therefore a>1$,$0<b<1$,$0<c<1$,$\therefore \log_a c<0$,$\log_b c>0$,$\therefore \log_a c<\log_b c$,故 A 错误;$\because 0<c<1$,$a>b$,$\therefore \log_c a<\log_c b$,$a^c>b^c$,$c^a<c^b$,故 BC 错误,D 正确. 故选 D.

8. A　如图,可知$\triangle OFH$ 中,$OF=c$,$FH=b$,$OH=a$,又因为 $\sin\angle HOF>\sin\angle HFO$,由正弦定理可知 $b>a$,即 $b^2>a^2$,所以 $c^2>2a^2$,得 $e>\sqrt{2}$. 又因为直线 $y=2x$ 与双曲线无公共点,则 $\frac{b}{a}\leqslant 2$,即 $b\leqslant 2a$,所以 $c^2\leqslant 5a^2$,所以 $e\leqslant\sqrt{5}$. 综上得$\sqrt{2}<e\leqslant\sqrt{5}$,故选 A.



9. BD　对于 A,根据分层抽样原则可知,样本容量为$\frac{9}{\frac{3}{3+1+2}}=9\times 2=18$,A 错误;

对于 B,由平均数、众数和中位数定义可知,该组数据平均数为$\frac{1+2+3+3+4+5}{6}=3$,众数为3,中位数为3,B 正确;

5
官方微信公众号:zizzsw　咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com　微信客服:zizzs2018

对于C,乙组数据的平均数为$\frac{5+6+9+10+5}{5}=7$,则其方差 $s^2=\frac{1}{5}\times[(5-7)^2+(6-7)^2+(9-7)^2+(10-7)^2+(5-7)^2]=4.4<5$,∴乙组数据更稳定,C错误;

对于D,∵$10\times85\%=8.5$,∴将该组数按照从小到大的顺序排列,第9个数为5,∴该组数据的85%分位数为5,D正确.故选BD.

10. AB 平面APC即为平面ACC_1A_1,$MN/\!/A_1C_1$,$A_1C_1/\!/AC$,即$MN/\!/AC$,而$AC\subset$平面ACC_1A_1,因此有$MN/\!/$平面ACC_1A_1,故A正确;由平面$BCC_1B_1/\!/$平面ADD_1A_1,又$B_1Q\subset$平面BCC_1B_1,故$B_1Q/\!/$平面ADD_1A_1,故B正确;平面APC即为平面ACC_1A_1,A,P,C_1共线,所以A,P,M三点不共线,故C不正确;平面MNQ与平面$ABCD$是相交的.故D不正确.故选AB.

11. AC 令函数$g(x)=\ln x\cdot f(x)$,则$g'(x)=\frac{f(x)}{x}+\ln x\cdot f'(x)>0$,所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又$g(1)=0$,所以$g(\mathrm{e})=f(\mathrm{e})>0$,$g(\frac{1}{\mathrm{e}})=-f(\frac{1}{\mathrm{e}})<0$,所以$f(\frac{1}{\mathrm{e}})+f(\mathrm{e})>0$,$f(\frac{1}{\mathrm{e}})>0$,而$f(1)$的大小不确定.故选AC.

12. BCD 对于A,当直线l垂直于x轴时,其方程为$x=-2$,符合题意.当直线l不垂直于x轴时,设直线l的方程为$y-4=k(x+2)$,即$kx-y+2k+4=0$,则$\frac{|2k+4|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,解得$k=-\frac{3}{4}$,所以直线$l$的方程为$y-4=-\frac{3}{4}(x+2)$,即$3x+4y-10=0$.综上,直线$l$的方程为$x=-2$或$3x+4y-10=0$,所以A错误;

对于B,由题意知直线l的斜率存在且不为0,故设直线l的方程为$y-4=k_1(x+2)$,即$k_1x-y+2k_1+4=0$.设圆心C到直线l的距离为d,则$\frac{1}{2}\times2\sqrt{4-d^2}\cdot d=2$,即$d^4-4d^2+4=0$,解得$d=\sqrt{2}$,则$d=\frac{|2k_1+4|}{\sqrt{k_1^2+1}}=\sqrt{2}$,解得$k_1=-1$或$k_1=-7$.所以直线$l$的方程为$x+y-2=0$或$7x+y+10=0$,所以B正确;

对于C,可知直线l'的斜率存在且不为0,设直线l'的方程为$y=k_2(x-2)$,即$k_2x-y-2k_2=0$,所以圆心$C(0,0)$到直线l'的距离$d'=\frac{|-2k_2|}{\sqrt{k_2^2+1}}$.因为$S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d'=d'\sqrt{4-d'^2}=\sqrt{(4-d'^2)d'^2}\leqslant\frac{4-d'^2+d'^2}{2}=2$(当且仅当$4-d'^2=d'^2$,即$d'^2=2$时取等号).由$d'^2=2$,得$\frac{(-2k_2)^2}{k_2^2+1}=2$,解得$k_2=1$或$k_2=-1$,所以C正确;

对于D,由题意知圆C'的方程为$(x-3)^2+(y-4)^2=4$,圆心$C'(3,4)$.设$Q(t,0)$,则以$C'Q$为直径的圆的圆心为$D(\frac{3+t}{2},2)$,半径为$\frac{1}{2}|C'Q|=\frac{\sqrt{(t-3)^2+16}}{2}$,则圆$D$的方程为$(x-\frac{3+t}{2})^2+(y-2)^2=\frac{(t-3)^2+16}{4}$,整理得$x^2+y^2-(3+t)x-4y+3t=0$,圆$C'$与圆$D$的公共弦所在直线即为直线$RS$,将$\begin{cases}x^2+y^2-(3+t)x-4y+3t=0,\\(x-3)^2+(y-4)^2=4\end{cases}$两式相减,可得直线$RS$的方程为$(3-t)x+4y+3t-21=0$,即$(3-x)t+3x+4y-21=0$.令$\begin{cases}3-x=0,\\3x+4y-21=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=3,\end{cases}$即直线$RS$恒过定点$(3,3)$,所以D正确.故选BCD.

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. $2\sqrt{2}+2$ 因为$x^2+2y^2\geqslant2\sqrt{2}xy$,所以$2\sqrt{2}xy-2xy\leqslant4$,即$xy\leqslant\frac{4}{2\sqrt{2}-2}=2\sqrt{2}+2$,当$x=\sqrt{2}y$时,等号成立,所以$xy$的最大值是$2\sqrt{2}+2$.

14. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 由抛物线方程可知焦点$F(\frac{p}{2},0)$,又$A(0,2)$,所以线段FA的中点B的坐标为$(\frac{p}{4},1)$,代入抛物线方程得$p=\sqrt{2}$,所以$B(\frac{\sqrt{2}}{4},1)$,所以点B到抛物线准线$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

15. $[0,4)$ 因为函数$f(x)=\frac{2^x+b}{2^x+a}(a,b\in\mathbf{R})$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,所以$f(0)=\frac{2^0+b}{2^0+a}=0$,解得$b=-1$,所以

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+a}$,又因为 $f(-x)+f(x)=0$,所以 $\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+a}+\frac{2^x-1}{2^x+a}=0$,即 $1+a\cdot 2^x=2^x+a$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以 $a=1$,所以 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

由 $f(mx^2)+f(1-mx)>f(0)$ 得 $f(mx^2)+f(1-mx)>0$,

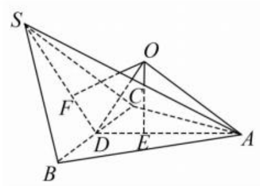
即 $f(mx^2)>-f(1-mx)$,即 $f(mx^2)>f(mx-1)$,

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $mx^2>mx-1$,即 $mx^2-mx+1>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

若 $m=0$,则 $1>0$ 恒成立;

若 $m\neq 0$,则 $\begin{cases}m>0\\ \Delta=m^2-4m<0\end{cases}$,解得 $0<m<4$,综上 $0\leqslant m<4$,所以 m 的取值范围为 $[0,4)$.

16. $\frac{7\pi}{3}$ 如图,取线段 BC 的中点 D,连接 AD,SD,由题意得 $AD\perp BC,SD\perp BC$,



$\therefore\angle ADS$ 是二面角 $A-BC-S$ 的平面角,$\therefore\angle ADS=\frac{2\pi}{3}$. 由题意得 $BC\perp$ 平面 ADS,分别取 AD,SD 靠近点 D 的三等分点 E,F,在平面 ADS 内,过点 E,F 分别作直线垂直于 AD,SD,两条直线的交点即球心 O,连接 OA,则球 O 半径 $R=OA$. 由题意知 $BD=\frac{1}{2}$,$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$DE=\frac{1}{3}AD=\frac{\sqrt{3}}{6}$,$AE=\frac{2}{3}AD=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 连接 OD,在 $\mathrm{Rt}\triangle ODE$ 中,$\angle ODE=\frac{\pi}{3}$,$OE=\sqrt{3}DE=\frac{1}{2}$,$\therefore OA^2=OE^2+AE^2=\frac{7}{12}$,$\therefore$ 球 O 的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{7\pi}{3}$.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

17. (1)证明:因为 $a\cos B=c\cos A+a\cos C$,及 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, …………………… 2 分

所以 $\sin A\cos B=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$, …………………… 4 分

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $b=a\cos B$. …………………… 5 分

(2)解:由(1)及 $\cos B=\frac{3}{4}$ 知 $b=\frac{3}{4}a$,又 $c=2$,

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 可得 $\frac{9}{16}a^2=a^2+4-3a$,即 $7a^2-48a+64=0$, …………………… 6 分

解得 $a=\frac{24+8\sqrt{2}}{7}$ 或 $a=\frac{24-8\sqrt{2}}{7}$,因为 $\cos B=\frac{3}{4}$,所以 $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$, …………………… 8 分

当 $a=\frac{24+8\sqrt{2}}{7}$ 时,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{24+8\sqrt{2}}{7}\times 2\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{2\sqrt{14}+6\sqrt{7}}{7}$, …………………… 9 分

当 $a=\frac{24-8\sqrt{2}}{7}$ 时,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{24-8\sqrt{2}}{7}\times 2\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{6\sqrt{7}-2\sqrt{14}}{7}$. …………………… 10 分

18. 解:(1)由 $a_{n+1}^2+2a_{n+1}^2a_n=a_n^2-2a_{n+1}a_n^2$,得 $a_{n+1}^2-a_n^2+2a_{n+1}^2a_n+2a_{n+1}a_n^2=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n+2a_{n+1}a_n)=0$. …………………… 1 分

$\because a_n>0$,所以 $a_{n+1}+a_n>0$,故 $a_{n+1}-a_n+2a_{n+1}a_n=0$ 得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$, …………………… 3 分

故 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是公差为 2 的等差数列,首项为 $\frac{1}{a_1}$, …………………… 4 分

则 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+2(n-1)$,由 $a_{100}=\frac{1}{201}$,得 $a_1=\frac{1}{3}$, …………………… 5 分

故 $\frac{1}{a_n}=2n+1$,于是 $a_n=\frac{1}{2n+1}$. …………………… 6 分

(2)依题意,$b_n=(-1)^n(2n+1+2^n)=(-1)^n(2n+1)+(-2)^n$, …………………… 7 分

故 $T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=[-3+(-2)]+[5+(-2)^2]+\cdots+[4n+1+(-2)^{2n}]$ …………………… 8 分

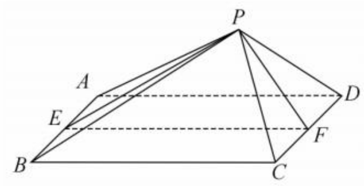
$=[-3+5-7+\cdots+(4n+1)]+[(-2)+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{2n}]$ …………………… 9 分

7 官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

$=\{(-3+5)+(-7+9)+\cdots+[-4n+1+(4n+1)]\}+[(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{2n}]$ ………………………………………… 11 分

$=2n+\dfrac{-2[1-(-2)^{2n}]}{1-(-2)}=2n-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2^{2n+1}}{3}$. ………………………………………… 12 分

19. (1)证明：如图，分别取 AB，DC 的中点 E，F，连接 EF，PE，PF，



因为 $PA=PB=BC=\sqrt{10}$，$PC=PD=\sqrt{2}$，

所以 $PE\perp AB$，$PF\perp DC$. ………………………………………… 2 分

又 $AB/\!/CD$，

所以 $PE\perp CD$，

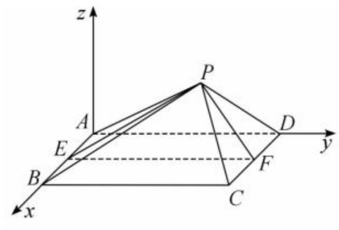
因为 $AB=2$，所以 $BE=CF=1$，所以 $PE=3$，$PF=1$，

所以 $PE^2+PF^2=10=BC^2=EF^2$，即 $PE\perp PF$，………………………………………… 4 分

又 $CD\cap PF=F$，$CD,PF\subset$平面 PCD，所以 $PE\perp$平面 PCD，

而 $PE\subset$平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$平面 PCD. ………………………………………… 6 分

(2)解：如图，建立空间坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$D(0,\sqrt{10},0)$，$C(2,\sqrt{10},0)$，………………………………………… 7 分



设 $P(a,b,c)$，由 $PA=PB=\sqrt{10}$，$PD=\sqrt{2}$ 得

$$\begin{cases}a^2+b^2+c^2=10\\(a-2)^2+b^2+c^2=10\\a^2+(b-\sqrt{10})^2+c^2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=\dfrac{9}{\sqrt{10}},\\c=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\end{cases}$$ ………………………………………… 9 分

即 $P(1,\dfrac{9}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{10}})$，设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{BC}=(0,\sqrt{10},0)$，$\overrightarrow{PC}=(1,\dfrac{1}{\sqrt{10}},-\dfrac{3}{\sqrt{10}})$，………………………………………… 10 分

所以 $\begin{cases}\sqrt{10}y=0\\x+\dfrac{1}{\sqrt{10}}y-\dfrac{3}{\sqrt{10}}z=0\end{cases}$，令 $z=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(\dfrac{3}{\sqrt{10}},0,1)$，………………………………………… 11 分

于是 $\sin\alpha=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PA}|}=\dfrac{3}{95}\sqrt{190}$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)记 $A_i(i=1,2,3)$ 分别为事件“第一、二、三轮检测合格”，A 为事件“每箱这种蔬菜不能在该超市销售”.

由题设知 $P(A_1)=1-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$，$P(A_2)=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$，$P(A_3)=\dfrac{8}{9}$，………………………………………… 3 分

所以 $P(A)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)=1-\dfrac{6}{7}\times\dfrac{7}{8}\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{1}{3}$. ………………………………………… 4 分

(2)设这 4 箱蔬菜的总收益为随机变量 X，则 X 的所有可能取值为 1 600，1 000，400，−200，−800，………………………………………… 5 分

且 $P(X=1\,600)=C_4^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^0=\dfrac{16}{81}$，

$P(X=1\,000)=C_4^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^1=\dfrac{32}{81}$，

$P(X=400)=C_4^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{27}$，

$P(X=-200)=C_4^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{8}{81}$，

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

$P(X=-800)=C_4^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$，………… 10分

故 X 的分布列为

X	1 600	1 000	400	-200	-800
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

………… 12分

21. 解：(1)由题意得 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$.

设 $G(x_0,y_0)$，则 $k_{GA_1}=\frac{y_0}{x_0+a}$，$k_{GA_2}=\frac{y_0}{x_0-a}$，所以 $k_{GA_1}\cdot k_{GA_2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}$，………… 2分

又 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $y_0^2=\frac{b^2(a^2-x_0^2)}{a^2}$，

则 $k_{GA_1}\cdot k_{GA_2}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{3}{4}$，可得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$. ………… 3分

又因为点 $(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆上，则 $\frac{3}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$. ………… 4分

由 $\begin{cases}\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}\\ \frac{3}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=3\end{cases}$，………… 5分

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………… 6分

(2)设点 $P(4,t)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

由题意可知切线 PM，PN 的斜率存在，

则切线 PM 的方程为 $\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1$，即 $3x_1x+4y_1y=12$，………… 7分

切线 PN 的方程为 $\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{3}=1$，即 $3x_2x+4y_2y=12$，………… 8分

即有 $\begin{cases}3x_1x+4y_1y=12\\ 3x_2x+4y_2y=12\end{cases}$，则两切线 PM，PN 相交于点 $P(4,t)$，………… 10分

则点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 满足方程 $12x+4ty=12$，………… 11分

即直线 MN 的方程为 $3x+ty=3$，经过定点 $Q(1,0)$. ………… 12分

22. (1)解：由题意，$H(x)=f(x)-xg(x)=x+\ln x-xe^x$，定义域为 $(0,+\infty)$，

可得 $H'(x)=1+\frac{1}{x}-(e^x+xe^x)=\frac{x+1}{x}-e^x(x+1)=(x+1)(\frac{1}{x}-e^x)(x>0)$，………… 2分

令 $t(x)=\frac{1}{x}-e^x$，则 $t'(x)=-\frac{1}{x^2}-e^x<0$，所以 $t(x)$ 单调递减，

又由 $t(1)=1-e<0$，$t(\frac{1}{2})=2-e^{\frac{1}{2}}>0$，所以存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使 $t(x_0)=0$，………… 3分

即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，即 $x_0+\ln x_0=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$H'(x)>0$，$H(x)$ 单调递增；

当 $x>x_0$ 时，$H'(x)<0$，$H(x)$ 单调递减，………… 4分

所以 $H(x)$ 有最大值，最大值为 $H(x_0)=x_0+\ln x_0-x_0e^{x_0}=-1$. ………… 5分

(2)证明：要证不等式 $\frac{2xg(x-1)}{f(x)-(x-1)}\geqslant x^2+1$，即证 $\frac{2xe^{x-1}}{1+\ln x}\geqslant x^2+1$，即证 $\frac{e^{x-1}}{1+\ln x}\geqslant\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$，………… 6分

当 $x=1$ 时，不等式显然成立；

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

当$\frac{1}{e}<x<1$时，令$m(x)=e^{x-1}-x$，可得$m'(x)=e^{x-1}-1$，…………………………………………… 7 分

因为$\frac{1}{e}<x<1$，可得$m'(x)<0$，所以$m(x)$在$(\frac{1}{e},1)$上单调递减，

所以$m(x)>m(1)=0$，即$e^{x-1}>x$，…………………………………………………………………… 8 分

要证不等式$\frac{e^{x-1}}{1+\ln x}\geqslant\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$，只需证明$\frac{x}{1+\ln x}\geqslant\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$，等价于证明$\frac{2x^2}{1+x^2}\geqslant 1+\ln x$，

令$F(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}-(1+\ln x)$，可得$F'(x)=\frac{-(x^2-1)^2}{x(1+x^2)^2}<0$，

函数$F(x)$在$(\frac{1}{e},1)$上单调递减，所以$F(x)>F(1)=0$，即$\frac{2x^2}{1+x^2}\geqslant 1+\ln x$；……………………………… 9 分

当$x>1$时，只需证$\frac{2e^{x-1}}{1+x^2}>\frac{1+\ln x}{x}$，

令$h(x)=\frac{2e^{x-1}}{1+x^2}$，可得$h'(x)=\frac{2e^{x-1}(x-1)^2}{(1+x^2)^2}>0$，函数$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，………………… 10 分

所以$h(x)>h(1)=1$，

令$u(x)=\frac{1+\ln x}{x}$，可得$u'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}<0$，函数$u(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$u(x)<u(1)=1$，

所以$x>1$时，$h(x)>u(x)$，所以不等式$\frac{2e^{x-1}}{1+x^2}>\frac{1+\ln x}{x}$成立.

综上所述，不等式得证. …………………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜
自主选拔在线