

机密★启用前

试卷类型 A

山东名校考试联盟
2023 年 12 月高三年级阶段性检测
数学试题

本试卷共 4 页, 22 题, 全卷满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项:

- 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.
- 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
- 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq \sqrt{5}\}$, $B = \{x \mid y = \lg(x-1)\}$, 则 $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B =$
A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{1\}$ D. $\{1, 2\}$
- 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 1-i$, 则 $z^{2023} =$
A. i B. -1 C. $-i$ D. 1
- 已知向量 $a = (1, 2)$, $b = (3, 1)$, 则 a 在 $a+b$ 上的投影向量为
A. $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$ B. $(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{6\sqrt{5}}{5})$ C. $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ D. $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$
- 已知函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 则“ $\operatorname{sgn}(\ln x) \times \operatorname{sgn}(x+1) = 1$ ”是“ $x > 1$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 盖碗是由茶碗、茶盖、茶船三件套组成, 盖碗又称“三才碗”, 蕴含了古代哲人讲的“天盖之, 地载之, 人育之”的道理. 如图是乾隆时期的山水人物方盖碗的茶盖和茶碗, 近似看作两个正四棱台的组合体, 其中茶碗上底面的边长为 6 cm, 下底面边长为 3 cm, 高为 5.4 cm, 则 1 L (1000 cm^3) 茶水至少可以喝(不足一碗算一碗)
A. 7 碗 B. 8 碗 C. 9 碗 D. 10 碗
- 已知实数 x, y 满足 $x > y > 0$, 且 $3x - y = 2$, 则 $\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y}$ 的最小值为
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6



高三数学试题 第 1 页 (共 4 页)

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则函数 $g(x) = 2\sqrt{e}f(f(x)) - 1$ 的零点个数为
A. 0 或 3 B. 0 或 1 C. 1 或 2 D. 2 或 3
8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内不存在最值, 且在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ 上, 满足 $f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 恒成立, 则 ω 的取值范围是
A. $(0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]$ B. $(0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$
C. $(0, \frac{1}{6}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{5}{6}]$ D. $(0, \frac{1}{6}] \cup [\frac{1}{3}, 1]$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列条件能推出 $a > b$ 的是
A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 且 $ab < 0$ B. $ac > bc$, 且 $c > 0$
C. $\frac{c}{a-c} > \frac{c}{b-c}$, 且 $c < 0$ D. $\frac{b+c}{a+c} > \frac{b}{a}$, 且 $a > 0, b > 0$
10. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_n^2 - 3a_n a_{n-1} + 2a_{n-1}^2 = 0$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$), 则该数列前 5 项和可能是
A. 5 B. 10 C. 29 D. 31
11. 对于任意非零实数 x, y , 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, $f(1) = 1$, 则下列结论正确的是
A. $f(\frac{1}{2}) = 2$ B. $\sum_{i=1}^{2023} f(\frac{1}{2^i}) = 2^{2023} - 2$
C. $f(x)$ 为奇函数 D. $f(x)$ 在定义域内单调递减
12. 已知正四面体 $O-ABC$ 的棱长为 2, 下列说法正确的是
A. 正四面体 $O-ABC$ 的外接球体积为 $\sqrt{6}\pi$
B. 若点 P 满足 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$, 且 $x + y + z = 1$, 则 $|\vec{OP}|$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
C. 若正四面体 $Q-DEF$ 在正四面体 $O-ABC$ 的内部, 且可以任意转动, 则正四面体 $Q-DEF$ 的体积可能为 $\frac{\sqrt{2}}{27}$
D. 若正四面体 $O-ABC$ 的四个顶点分别在四个互相平行的平面内, 且每相邻平行平面间的距离均相等, 则此距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知 $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = 2$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值为 _____.

14. 如图所示, 将一个顶角为 120° 的等腰三角形(含边界和内部)的底边三等分, 挖去由两个等分点和上顶点构成的等边三角形, 得到与原三角形相似的两个全等三角形, 再对余下的所有三角形重复这一操作. 如果这个操作过程无限继续下去……, 最后挖剩下的就是一条“雪花”状的科克曲线(Koch curve). 已知最初等腰三角形的面积为3, 则经过5次操作之后所得图形的面积为 _____.



(第14题图)

15. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为4的正三角形, 点 M 为平面 ABC 内的一点, 则 $\vec{MA} \cdot (\vec{MB} + \vec{MC})$ 的最小值为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = (x^2 + a)\cos x$, 若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 则 a 的取值范围是 _____.

四、解答题:本题共6小题,共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 + a_6 = 16, S_5 = 30$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

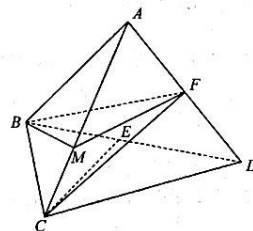
(2) 求证: $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} < 1$.

18. (12分)

如图, 在正三棱锥 $A-BCD$ 中, $BC = 2\sqrt{2}, AB = 2, E, F$ 分别是 BD, AD 中点, M 是 AC 上一点, 且满足 $AM = 2MC$.

(1) 证明: $CE \parallel$ 平面 BMF ;

(2) 求点 D 到平面 CEF 的距离.



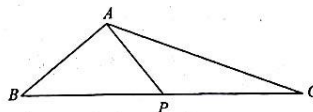
(第18题图)

19. (12分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, 点 P 在边 BC 上, 且 $AP \perp AB, AP = 2$.

(1) 若 $PC = \sqrt{13}$, 求 PB ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.



(第19题图)

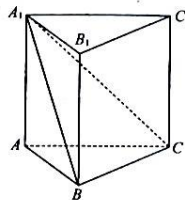
20. (12分)

如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=2$,侧面 ABB_1A_1 是正方形,且平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

(1)求证: $AB \perp BC$;

(2)当 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$,在线段 A_1C 上是否存在

点 E ,使平面 ABE 与平面 BCE 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$? 说明理由.



(第20题图)

21. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=2, na_{n+1}=(2n+2)a_n+(n^2+n)2^{n+1}$.

(1)证明:数列 $\left\{\frac{a_n}{n \cdot 2^n}\right\}$ 是等差数列;

(2)设 $b_n = \frac{a_n}{n} \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前100项和 S_{100} .

22. (12分)

定义函数 $f_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1)求曲线 $y = f_n(x)$ 在 $x = -2$ 处的切线斜率;

(2)若 $f_2(x) - 2 \geq ke^x$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,求 k 的取值范围;

(3)讨论函数 $f_n(x)$ 的零点个数,并判断 $f_n(x)$ 是否有最小值.若 $f_n(x)$ 有最小值 m ,证明: $m > 1 - \ln 2$;若 $f_n(x)$ 没有最小值,说明理由.

(注: $e = 2.71828\dots$ 是自然对数的底数)

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索