五市十校教研教改共同体·2024届高三12月大联考·数学

参考答案、提示及评分细则

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	A	A	C	D	B

1.【答案】B

【解析】∵$B=\{x|x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$,∴$A\cup B=\{-1,2,3\}$,$\complement_U A\cup B=\{-2,0,1\}$,故选B.

2.【答案】C

【解析】∵$|z-2i|=\sqrt{3}$,∴$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{3}$,即$x^2+(y-2)^2=3$,故选C.

3.【答案】D

【解析】∵$\boldsymbol{a}\perp(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,∴$\boldsymbol{a}\cdot(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$,则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-3|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}|\times2\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得$\theta=\frac{5\pi}{6}$.故选D.

4.【答案】A

【解析】由已知$y'=me^x+\ln x+1$,在点$(1,me)$处的切线斜率为$k=y'|_{x=1}=me+1=2$,∴$m=e^{-1}$,将点$(1,1)$代入$y=2x+t$,∴$2+t=1$,$t=-1$.故选A.

5.【答案】A

【解析】由题意知$\beta=2k\pi+\alpha+\frac{\pi}{3}$,根据三角函数的定义得$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=\frac{3}{5}$,所以$\cos\beta=\cos\left(2k\pi+\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.故选A.

6.【答案】C

【解析】设经过n年后,每年度平均每户较上一年增加的收入为y元,则$y=4000(1+0.1)^n>12000$,即$1.1^n>3\Rightarrow n>\log_{1.1}3=\frac{\ln 3}{\ln 1.1}=\frac{\ln 3}{\ln 11-\ln 10}\approx11$,所以所求年份是2035年.故选C.

7.【答案】D

【解析】$f(x)=\cos^4x-\sin^4x+2\sin x\cos x+2=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)+\sin 2x+2=(\cos^2x-\sin^2x)+\sin 2x+2=\cos 2x+\sin 2x+2=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2$,

由$2x+\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,可得$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,当$k=0$时,$x=-\frac{\pi}{8}$,

故函数$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{8},2\right)$对称,

由等差中项的性质可得$a_1+a_{13}=a_2+a_{12}=\cdots=a_6+a_8=2a_7$,

所以数列$\{y_n\}$的前13项和为$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{13})=6\times4+2=26$.故选D.

8.【答案】B

【解析】设$g(x)=\frac{f(x)-1}{e^x}$,∵$f(x)>f'(x)+1$,即$f'(x)-f(x)+1<0$,

∴$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)+1}{e^x}<0$,∴$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减,又$f(2)=e^2+1$,

$\therefore$ 不等式 $e^{-x}f(x)\geqslant e^{-x}+1\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-1}{e^x}\geqslant 1=\dfrac{f(2)-1}{e^2}$，

即 $g(x)\geqslant g(2)$，$\therefore x\leqslant 2$，$\therefore$ 原不等式的解集为 $(-\infty,2]$. 故选 B.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABD	BC	AC

9.【答案】BC

【解析】$f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 不存在极值点，易得 B 与 C 正确. 故选 BC.

10.【答案】ABD

【解析】$\because l_1\perp l_2$，$\therefore 1\times b+(a-2)\times 1=0\Rightarrow a+b=2$，所以 $0<ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=1$，A 正确；

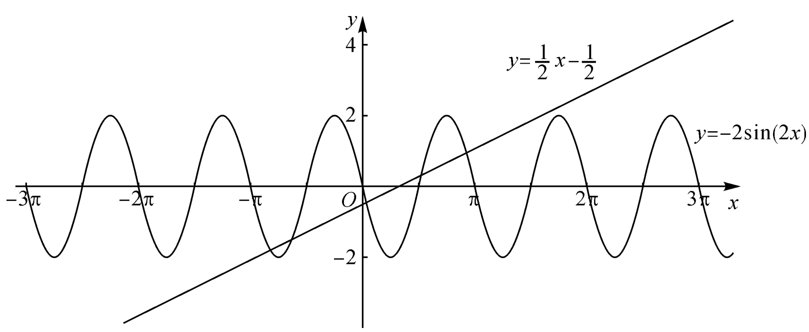
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}\leqslant 2(a+b)=4$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，故 B 正确；

$a^2+b^2=a^2+(2-a)^2=2a^2-4a+4=2(a-1)^2+2\geqslant 2$，故 C 错误；

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+1\geqslant 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+1=3$，当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$，即 $a=b=1$ 时等号成立，故 D 正确. 故选 ABD.

11.【答案】BC

【解析】由已知 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)-\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)=2\cos\left(\omega x+\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$f(x)$ 为偶函数，得 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，$f(x)=2\cos\omega x$，又最小正周期为 π，所以 $\omega=2$，$f(x)=2\cos 2x$. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)=2\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，A 错误；由 $g(x)\geqslant 1$ 得 $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\Rightarrow-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$，所以 $-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，B 正确；由 $g(x)=\dfrac{2}{3}$ 得 $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$，所以 $\cos\left(2x_1+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x_2+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$，又 $x_1,x_2\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，所以 $2x_1+\dfrac{\pi}{3}$，$2x_2+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$，由对称性知 $\dfrac{\left(2x_1+\dfrac{\pi}{3}\right)+\left(2x_2+\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}=\pi$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{2\pi}{3}$，$\sin(x_1+x_2)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，C 正确；$y=f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\sin 2x$，结合图象知 D 错误. 故选 BC.



12.【答案】AC

【解析】由已知 $\pi rl=3\pi$，$rl=3$，当 $r=1$ 时，$l=3$，此时圆锥的高为 $h=\sqrt{l^2-r^2}=2\sqrt{2}$，此时圆锥的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$，A 正确；

当 $r=\frac{3}{2}$ 时，圆锥轴截面的夹角为钝角，故截面三角形的最大面积为 $S=\frac{1}{2}l^2\sin 90^\circ=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，B 错误；

当 $r=1$ 时，侧面展开图的弧长为 2π，所以圆心角为 $\angle ASP=\frac{2\pi}{3}$，在 $\triangle ASP$ 中，由余弦定理得 $AP=\sqrt{AS^2+SP^2-2AS\cdot SP\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{13}$，C 正确；

棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体的外接球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，圆锥 SO 的内切球半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，不可以任意转动，D 错误．故选 AC．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13.【答案】31

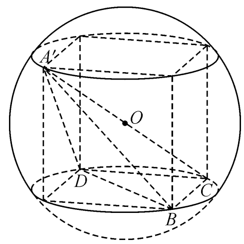
14.【答案】$x^2+(y-2)^2=8$

【解析】抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 $(2,0)$，其关于直线 $y=x$ 的对称点 C 为 $(0,2)$，C 到直线 $2x-y-3=0$ 的距离为 $d=\frac{|-2-3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，所以圆 C 的半径为 $r=\sqrt{d^2+\frac{1}{4}|AB|^2}=\sqrt{5+3}=2\sqrt{2}$，圆 C 的方程为 $x^2+(y-2)^2=8$．

15.【答案】$\frac{79}{4}$

【解析】因为 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f(2-x)$，所以函数的周期为 4，且关于直线 $x=1+2k$，$k\in\mathbf{Z}$ 对称，作出函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=-2$ 的图象知共有 5 个交点，其横坐标从小到大依次为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，所以 $\log_2(-x_1)=-2$，$x_1=-\frac{1}{4}$，$\frac{x_2+x_3}{2}=3$，$\frac{x_4+x_5}{2}=7$，$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-\frac{1}{4}+20=\frac{79}{4}$．

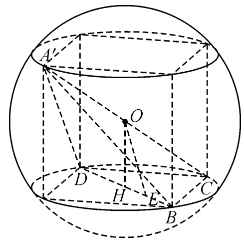
16.【答案】① $\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi$　② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$



【解析】因为 $AB=AD=3\sqrt{2}$，$BC=CD=3$，$BC\perp CD$，$A'C=3\sqrt{3}$，

如图所示，将四面体 $A'-BCD$ 置于棱长为 3 的正方体中，可知外接球即为此正方体的外接球，所以球的半径为 $R=\frac{1}{2}A'C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\times\pi\times\frac{81\sqrt{3}}{8}=\frac{27\sqrt{3}}{2}\pi$；



过点 E 作球 O 的截面，若要所得的截面圆面积最小，只需截面圆半径最小，设球心到截面的距离为 d，截面半径为 r，则 $r=\sqrt{R^2-d^2}$，所以只需球心到截面的距离 d 最大即可，

当且仅当 OE 与截面垂直时，球心到截面的距离 d 最大，即 $d_{\max}=OE$，

如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle OHE$ 中，$OH=\frac{3}{2}$，$HE=\frac{1}{4}BD=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

$OE^2=OH^2+HE^2=\frac{9}{4}+\frac{9}{8}=\frac{27}{8}$，所以 $r_{\min}=\sqrt{R^2-OE^2}=\sqrt{\frac{27}{4}-\frac{27}{8}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤．

17.【解析】(1)由已知 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，即 $c(\sin B-\sin C)-(b-a)(\sin A+\sin B)=0$，………… 1 分

由正弦定理得 $c(b-c)-(b-a)(a+b)=0$，即 $bc-c^2+a^2-b^2=0$，………… 2 分

整理得 $b^2+c^2-a^2=bc$，即 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{\pi}{3}$；………… 4 分

(2)因为 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，则 $\cos(B+C)=-\frac{1}{2}$，………… 5 分

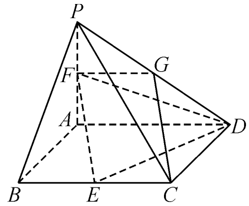
即 $\cos B\cos C-\sin B\sin C=-\frac{1}{2}$，又 $\cos B\cos C=-\frac{1}{6}$，所以 $\sin B\sin C=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$．………… 7 分

因为$\triangle ABC$的外接圆半径$R=2$，

所以由正弦定理可得 $\sin B\sin C=\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}=\frac{bc}{4R^2}=\frac{1}{3}$，所以 $bc=\frac{16}{3}$， …………………………… 9 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. …………………………………… 10 分

18.【解析】(1)方法一：取 PD 的中点 G，连接 GF，CG，因为 G，F 分别为 PD，PA 的中点，



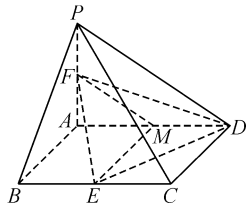
所以 $GF/\!/AD$，且 $GF=\frac{1}{2}AD$，又因为四边形 $ABCD$ 为矩形，且 E 为 BC 的中点，

所以 $CE/\!/AD$，且 $CE=\frac{1}{2}AD$， …………………………………………………… 2 分

可得 $GF/\!/CE$，且 $GF=CE$，所以四边形 $CEFG$ 为平行四边形，

则 $EF/\!/CG$，且 $EF\not\subset$平面 PCD，$CG\subset$平面 PCD，所以 $EF/\!/$平面 PCD. ……………………… 5 分

方法二：取 AD 的中点 M，连接 FM，ME，易证得平面 $EFM/\!/$平面 PCD，



又 $EF\subset$平面 EFM，所以 $EF/\!/$平面 PCD.

(注：请严格按步骤计分，由线线平行直接得出面面平行应适当扣分)

(2)由已知平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$，

又 $PA\perp AB$，$PA\subset$平面 PAB，所以 $PA\perp$平面 $ABCD$， ………………………………… 7 分

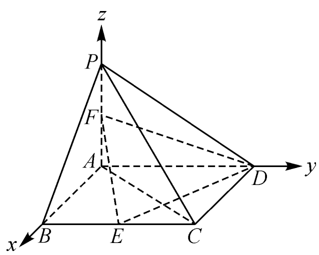
(注：没有证明 $PA\perp$平面 $ABCD$，扣除步骤分 2 分)

如图，以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,1)$，$E(1,1,0)$，$F\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，

可得$\overrightarrow{DE}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{DF}=\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$. ……………………………………… 8 分

设平面 DEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=x-y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=-2y+\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$



令 $x=1$，则 $y=1$，$z=4$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,1,4)$， ……………………………… 10 分

设直线 PD 与平面 DEF 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PD}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PD}|}\right|=\frac{2}{3\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{15}$， ……………… 11 分

$\therefore\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{15}\right)^2}=\frac{\sqrt{215}}{15}$，

即直线 PD 与平面 DEF 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{215}}{15}$. ………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)参加“艺术体操”人数在 35 人以上的学校共 5 所，ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3， ………… 1 分

则 $P(X=0)=\frac{C_5^0C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$，$P(X=1)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$，

$P(X=2)=\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$，$P(X=3)=\frac{C_5^3C_5^0}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$， …………………………………… 5 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{3}{2}$； …………………………………… 6 分

(2)由已知该同学在一轮测试中为“优秀”的概率为 $p=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5}+C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{44}{125}$， …………………… 8 分

则该同学在 n 次测试中获“优秀”次数 X 服从二项分布，即满足 $X\sim B(n,p)$，$p=\frac{44}{125}$， …………………… 9 分

由 $E(X)=np=n\times\frac{44}{125}\geqslant 8\Rightarrow n\geqslant\frac{125\times 8}{44}\approx 22.7$， …………………… 11 分

所以理论上至少要进行 23 次测试. …………………… 12 分

20.【解析】(1)由已知 $S_{n+1}=3S_n+2n+5(n\in\mathbf{N}^*)$可得当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=3S_{n-1}+2n+3$，

两式相减得 $S_{n+1}-S_n=3(S_n-S_{n-1})+2$，即 $a_{n+1}=3a_n+2$，从而 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)(n\geqslant 2)$. …………………… 3 分

当 $n=1$ 时，$S_2=3S_1+7$，所以 $a_2+a_1=3a_1+7$，又 $a_1=5$，所以 $a_2=17$，

从而 $a_2+1=3(a_1+1)$，所以 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，又 $a_1=5$，$a_1+1=6$， …………………… 4 分

$\therefore\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$，$\therefore$数列$\{a_n+1\}$是以 6 为首项，3 为公比的等比数列； …………………… 5 分

(2)由(1)知 $a_n+1=6\times 3^{n-1}$，整理得 $a_n=2\times 3^n-1$， …………………… 6 分

因为 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，所以 $f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$.

$f'(1)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$，记 $b_n=na_n=2n\times 3^n-n$，$\therefore f'(1)=b_1+b_2+\cdots+b_n$ …………………… 7 分

记 $T_n=2\times 3^1+4\times 3^2+\cdots+2n\times 3^n$ ①，

则 $3T_n=2\times 3^2+4\times 3^3+\cdots+2n\times 3^{n+1}$ ②，

①－②得：$-2T_n=2\times 3^1+2\times 3^2+2\times 3^3\cdots+2\times 3^n-2n\times 3^{n+1}$

$=\frac{6(1-3^n)}{1-3}-2n\times 3^{n+1}=(1-2n)\times 3^{n+1}-3$，所以 $T_n=\frac{(2n-1)\times 3^{n+1}+3}{2}$. …………………… 10 分

又 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$， …………………… 11 分

所以 $f'(1)=\frac{(2n-1)\times 3^{n+1}+3}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$. …………………… 12 分

21.【解析】设 d 是点 M 到直线 $l:x=6$ 的距离，由题意知$\frac{|MF|}{d}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|6-x|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $3[(x-2)^2+y^2]=(6-x)^2$，即 $2x^2+3y^2=24$，所以$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$， …………………… 3 分

所以动点 M 的轨迹是焦点在 x 轴上，长轴、短轴长分别是 $4\sqrt{3}$，$4\sqrt{2}$的椭圆； …………………… 4 分

(2)①若直线 l 的斜率不存在，直线 l 的方程为 $x=2$，则 $A\left(2,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，$B\left(2,-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，

$P(2,2)$，$Q(2,-2)$，所以$|AB|=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，$|PQ|^2=16$，$|AB|\cdot|PQ|^2=\frac{128\sqrt{3}}{3}$； …………………… 5 分

②若直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1,\\ y=k(x-2),\end{cases}$整理得$(2+3k^2)x^2-12k^2x+12k^2-24=0$，

则 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{12k^2-24}{2+3k^2}$， …………………… 7 分

所以$|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)\left[\left(\frac{12k^2}{2+3k^2}\right)^2-4\times\frac{12k^2-24}{2+3k^2}\right]}=\frac{8\sqrt{3}(k^2+1)}{2+3k^2}$， …………………… 8 分

因为圆心 $O(0,0)$到直线 l 的距离 $d=\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以$|PQ|^2=4\left(8-\frac{4k^2}{k^2+1}\right)=\frac{16(k^2+2)}{k^2+1}$， …………………… 9 分

所以$|AB|\cdot|PQ|^2=\frac{8\sqrt{3}(k^2+1)}{2+3k^2}\cdot\frac{16(k^2+2)}{k^2+1}=\frac{128\sqrt{3}(k^2+2)}{2+3k^2}$，

令 $t=3k^2+2$,则 $k^2=\frac{t-2}{3}$,$t\in[2,+\infty)$,所以 $|AB|\cdot|PQ|^2=\frac{128\sqrt{3}}{3}\left(\frac{t+4}{t}\right)=\frac{128\sqrt{3}}{3}\left(1+\frac{4}{t}\right)$, ……… 10 分

$\because t\in[2,+\infty)$,$\therefore 1<1+\frac{4}{t}\leqslant 3$,所以 $\frac{128\sqrt{3}}{3}<|AB|\cdot|PQ|^2\leqslant 128\sqrt{3}$,

综上,$|AB|\cdot|PQ|^2$ 的取值范围是 $\left[\frac{128\sqrt{3}}{3},128\sqrt{3}\right]$. ………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) $f'(x)=1+\ln x-1-ax=\ln x-ax$,$x>0$,

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上为增函数,

所以 $f'(x)\geqslant 0$,$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 恒成立,即 $a\leqslant\frac{\ln x}{x}$,$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 恒成立, ……………………………… 2 分

记 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,由 $h'(x)>0\Rightarrow 0<x<e$,由 $h'(x)<0\Rightarrow x>e$,

所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},e\right)$ 上递增,在 $(e,+\infty)$ 上递减,又当 $x\to+\infty$ 时,$h(x)\to 0$,

所以 $a\leqslant h\left(\frac{1}{e}\right)=-e$,即实数 a 的最大值为 $-e$; …………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个极值点,所以 x_1,x_2 是方程 $f'(x)=\ln x-ax=0$ 的两个实数根,且 $1<x_1<e<x_2$. 由 $\begin{cases}\ln x_1=ax_1,\\ \ln x_2=ax_2\end{cases}\Rightarrow a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$. …………………………………………………… 5 分

$\frac{e^m}{x_1}<\frac{x_2^m}{e}$ 两边取自然对数得 $m-\ln x_1<m\ln x_2-1\Rightarrow m+1<\ln x_1+m\ln x_2=ax_1+amx_2$,

即 $m+1<a(x_1+mx_2)=\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}(x_1+mx_2)=\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}+m\right)\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}$, ………………………………………… 7 分

令 $\frac{x_1}{x_2}=t\in(0,1)$,则 $m+1<\frac{(t+m)\ln t}{t-1}$ 在 $t\in(0,1)$ 恒成立.

所以 $\ln t-\frac{(m+1)(t-1)}{t+m}<0$ 在 $t\in(0,1)$ 恒成立. ……………………………………………………… 8 分

令 $g(t)=\ln t-\frac{(m+1)(t-1)}{t+m}(t\in(0,1))$,则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{(m+1)^2}{(t+m)^2}=\frac{(t-1)(t-m^2)}{t(t+m)^2}$.

①当 $m^2\geqslant 1$,即 $m\geqslant 1$ 时,$g'(t)>0$,$g(t)$ 在 $(0,1)$ 上递增,

所以 $g(t)<g(1)=0$ 恒成立,满足题意; ………………………………………………………………………… 10 分

②当 $0<m<1$ 时,$g(t)$ 在 $(0,m^2)$ 上递增,在 $(m^2,1)$ 上递减,

所以当 $x\in(m^2,1)$ 时,$g(t)>g(1)=0$,

所以,$g(t)<0$ 在 $t\in(0,1)$ 不能恒成立,不满足题意.

综上,m 的取值范围是 $[1,+\infty)$. ……………………………………………………………………………… 12 分