2024届普通高等学校招生全国统一考试
大联考(高三)
数学

全卷满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考生号
班级
姓名

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集$U=\mathbf{R}$,集合$A=\{x\mid 2^x\leqslant 2\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,x^2\geqslant\frac{1}{4}\right\}$,则$(\complement_U A)\cap B=$ ( )

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left(-\frac{1}{2},1\right]$

C. $\left(\frac{1}{2},1\right]$　　D. $(1,+\infty)$

2. 已知i为虚数单位,则复数$z=\frac{2}{1+i}+\frac{2}{1-i}=$ ( )

A. -2　　B. 2　　C. $-2i$　　D. $2i$

3. 为了得到函数$y=\sin(4x+2)$的图象,可以将函数$y=\sin(4x-6)$的图象 ( )

A. 向右平移8个单位长度　　B. 向左平移8个单位长度

C. 向右平移2个单位长度　　D. 向左平移2个单位长度

4. 在一个空旷的房间中大声讲话会产生回音,这种现象叫做“混响”.用声强的大小来度量声音的强弱,假设讲话瞬间发出声音的声强为W_0,则经过t秒后这段声音的声强变为$W(t)=W_0e^{-\frac{t}{\tau}}$($\tau$为常数).把混响时间$T_R$定义为声音的声强衰减到讲话之初的$10^{-6}$倍所需时间,则$T_R$约为 ( )

(参考数据:$\ln 2\approx 0.7$,$\ln 5\approx 1.6$)

A. 4.2τ　　B. 9.6τ　　C. 13.8τ　　D. 23τ

5. 下列函数中,满足$f(xy)=f(x)+f(y)-1$的为 ( )

A. $f(x)=\lg(1+x)$　　B. $f(x)=1+\lg x$

C. $f(x)=2^{1+x}$　　D. $f(x)=1+2^x$

6. 若$\cos 2\theta=\frac{3}{5}$,则$\tan^2\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}=$ ( )

A. $-\frac{15}{4}$　　B. $-\frac{13}{16}$　　C. $\frac{13}{16}$　　D. $\frac{15}{4}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，设 p：$y=|f(x)|$ 的图象关于 y 轴对称；q：$f(x)$ 是奇函数或偶函数，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1=2,a_2=-3,a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}^2+13}{a_n},n\in\mathbf{N}^*$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2024}S_k=$ （　　）

A. $-2\ 024$　　B. $-1\ 012$　　C. -506　　D. 0

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{4}+\cos\dfrac{x}{4}$，则 （　　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 8π

B. $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}+1$

C. $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上单调递增

D. $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{4\pi}{3},0\right)$ 中心对称

10. 下列函数中，满足 $f(x)\geqslant f(1)$ 的为 （　　）

A. $f(x)=x^2-2x+2$　　B. $f(x)=e^{x-2}+e^{-x}$

C. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$　　D. $f(x)=x^2+\dfrac{4}{x^2+1}$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $d(d\in\mathbf{R})$ 的等差数列，$n\in\mathbf{N}^*$，下列命题正确的是 （　　）

A. 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，则 $d=1$　　B. 若 $d=\dfrac{1}{2}$，则 $\{a_n\}$ 为等差数列

C. 若 $d>1$，则 $\{a_n\}$ 为递减数列　　D. 若 $d>1$，则 $\{na_n\}$ 为递增数列

12. 设函数 $f(x)=2^x-ax-b(a,b\in\mathbf{R})$，下列命题正确的是 （　　）

A. 若 $f(x)$ 存在负零点，则 $b>1$

B. 若 $a<0$，则 $f(x)$ 有且只有一个零点

C. 若 $f(x)$ 有且只有两个正零点，则 $b<1$

D. 若 $a(b-1)<0$ 且 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 的零点都是正的

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x)=x^4e^{x-1}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为________.

14. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=10,|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=4$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

15. 若函数 $f(x)=\sin x+a\ln x$ 的图象在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增，则实数 a 的最小值为________.

16. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的两个相邻交点为 P,Q，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 的一个交点为 M，若 $\tan\angle PMQ=-\sqrt{2}$，则实数 $\omega=$________.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知在平面直角坐标系中，点 $A(1,2)$，$B(4,6)$，$C(0,3)$.

(1)若 $t>0$，且 $(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\perp(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC})$，求 t 的值；

(2)记 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的投影向量为 $\boldsymbol{u}$，求 $\boldsymbol{u}$ 的坐标.

18.（12 分）

在△ABC 中，已知 $3\tan A+3\tan B+2\tan C=0$.

(1)求 $\tan A\tan B$；

(2)若△ABC 的面积为$\sqrt{3}$，$\tan A+\tan B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，求 AB 的长度.

19.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2-4ax+1$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 关于点 $(0,1)$ 对称，求 a 的值；

(2)若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 1，求 a 的取值范围.

20.(12 分)

已知函数 $f(x)=(\cos 2x+1)(\cos x+a)$，$a\in(-1,1)$，$g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{\cos x-1}$.

(1)求 $g(x)$的值域.

(2)记 $g(x)$的值域为 D，试问是否存在 a，使得集合 $D\cap \mathbf{Z}$ 有且只有 2 个元素？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，请说明理由.

参考公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

21.(12 分)

记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知等比数列$\{b_n\}$满足 $b_n=a_{3n-2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，$b_1+b_3=5$，$b_2+b_4=\dfrac{5}{2}$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，a_{3n-2}，a_{3n-1}，a_{3n}，a_{3n+1} 成等差数列.

(ⅰ)求 S_1 和 S_4 的值；

(ⅱ)求 S_{3n-2}.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln(1+ax)-x^2(a>0)$.

(1)若 $a=1$，求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $x=0$ 是 $f(x)$的极小值点，求实数 a 的取值范围.

2024届普通高等学校招生全国统一考试
大联考(高三)
数学答案

1. D 【解析】由题意，$A=\{x\,|\,x\leqslant 1\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant -\frac{1}{2}\text{或}x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$，所以 $\complement_U A=\{x\,|\,x>1\}$，故 $(\complement_U A)\cap B=(1,+\infty)$. 故选 D.

2. C 【解析】$\frac{2}{1+\mathrm{i}}-\frac{2}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}-\frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=(1-\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})=-2\mathrm{i}$. 故选 C.

3. D 【解析】设 $g(x)=\sin(4x-6)$. 把函数 $y=g(x)$ 的图象向左平移 $a(a>0)$ 个单位长度后，得到 $y=g(x+a)=\sin(4x+4a-6)$ 的图象. 令 $f(x)=\sin(4x+2)$，为了得到函数 $y=f(x)$ 的图象，只需令 $4a-6=2$，得 $a=2$，符合题意，所以把函数 $y=\sin(4x-6)$ 的图象向左平移 2 个单位长度即可得到 $y=\sin(4x+2)$ 的图象. 故选 D.

4. C 【解析】由题意，$W(T_R)=10^{-6}W_0$，即 $e^{-\frac{T_R}{\tau}}=10^{-6}$，
所以 $T_R=\tau\cdot\ln 10^6=\tau\times 6\times(\ln 2+\ln 5)\approx 13.8\tau$.
故选 C.

5. B 【解析】(方法 1)令 $g(x)=f(x)-1$，则 $g(xy)=f(xy)-1$，$g(x)+g(y)=f(x)+f(y)-2$. 由于 $f(xy)=f(x)+f(y)-1$，即 $f(xy)-1=f(x)+f(y)-2$，所以 $g(xy)=g(x)+g(y)$.
而满足 $g(xy)=g(x)+g(y)$ 的函数有对数函数 $g(x)=\log_a x(a>0,a\neq 1)$，
所以 $f(x)=g(x)+1=1+\log_a x$，只有 B 选项符合题意. 故选 B.
(方法 2)令 $x=y=1$，则 $f(1)=f(1)+f(1)-1$，得 $f(1)=1$. 在四个选项中，只有 B 选项满足 $f(1)=1$. 故选 B.

6. A 【解析】(方法 1)因为 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta=\frac{3}{5}$，所以 $\cos^2\theta=\frac{4}{5}$，$\sin^2\theta=\frac{1}{5}$，故 $\tan^2\theta=\frac{1}{4}$，$\tan^2\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{4}-4=-\frac{15}{4}$. 故选 A.
(方法 2)因为 $\tan^2\theta-\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta-\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}=\frac{-4\cos 2\theta}{1-\cos^2 2\theta}=\frac{-4\times\frac{3}{5}}{1-\frac{9}{25}}=-\frac{15}{4}$. 故选 A.

7. B 【解析】令 $g(x)=|f(x)|$，若 $f(x)$ 是奇函数或偶函数，则 $g(-x)=|f(-x)|=|f(x)|=g(x)$，所以 $g(x)$ 是偶函数，所以 $y=|f(x)|$ 的图象关于 y 轴对称；
反之，若 $f(x)=\begin{cases}1,x<1,\\-1,x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $|f(x)|=1$，所以 $y=|f(x)|$ 的图象关于 y 轴对称，但是 $f(x)$ 是非奇非偶函数.
故 p 是 q 的必要不充分条件.
故选 B.

8. B 【解析】由 $a_1=2$，$a_2=-3$，根据递推式得，$a_3=\frac{a_2^2-13}{a_1}=-2$，$a_4=\frac{a_3^2-13}{a_2}=3$，$a_5=\frac{a_4^2-13}{a_3}=2$，$a_6=\frac{a_5^2-13}{a_4}=-3$，…，因此 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列，从而 $S_1=2$，$S_2=-1$，$S_3=-3$，$S_4=0$，…，故 $\{S_n\}$ 也是以 4 为周期的周期数列，所以 $\sum_{k=1}^{2\,024}S_k=506\times(S_1+S_2+S_3+S_4)=506\times(-2)=-1\,012$. 故选 B.

9. AC 【解析】易得 $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$，
故 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$，故 A 选项正确；
$f(x)$ 的最大值是 2，B 选项错误；
令 $\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，可得 $x\in\left(-\frac{8\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$ 为 $f(x)$ 的一个单调递增区间，
而 $(-\pi,\pi)\subseteq\left(-\frac{8\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上单调递增，C 选项正确；

因为 $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\neq 0$，所以 $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$ 中心对称，D 选项错误.

故选 AC.

10. ABD 【解析】本题需要选出在 $x=1$ 处取最小值的一个选项.

对于 A 选项，$f(x)=(x-1)^2+1$，在 $x=1$ 处取最小值，故 A 选项正确；

对于 B 选项，由基本不等式，$f(x)\geqslant 2\sqrt{e^{x-2}\cdot e^{-x}}=2e^{-1}$，等号成立的条件是 $e^{x-2}=e^{-x}$，即 $x=1$，故 $f(x)\geqslant f(1)$，B 选项正确；

对于 C 选项，$f(-1)=-2$，$f(1)=2$，所以 $f(-1)<f(1)$，不满足题意，故 C 选项错误；

对于 D 选项，由基本不等式得，$f(x)=x^2+1+\frac{4}{x^2+1}-1\geqslant 2\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{4}{x^2+1}}-1=3$，等号成立的条件是 $x^2+1=\frac{4}{x^2+1}$，即 $x^2+1=2$，即 $x=\pm 1$，因此 $f(x)\geqslant f(1)$ 成立，D 选项正确.

故选 ABD.

11. ABC 【解析】因为 $\frac{S_1}{a_1}=1$，且数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 d 的等差数列，所以 $\frac{S_n}{a_n}=1+(n-1)d$.①

所以 $S_n=[1+(n-1)d]a_n$. 则 $S_{n+1}=(1+nd)a_{n+1}$，

所以 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(1+nd)a_{n+1}-[1+(n-1)d]a_n$，整理得 $nda_{n+1}=[1+(n-1)d]a_n$.②

对于 A 选项，若 $\{a_n\}$ 为等比数列，记 $a_n=a_1q^{n-1}$. 当 $q=1$ 时，$a_n=a_1$，$S_n=na_1$，所以 $\frac{S_n}{a_n}=n$，由①可得 $d=1$. 当 $q\neq 1$ 时，取 $n=2$ 可得 $\frac{S_2}{a_2}=q^{-1}+1=1+d$，故 $d=q^{-1}$；取 $n=3$ 可得 $\frac{S_3}{a_3}=q^{-2}+q^{-1}+1=d^2+d+1$，再由①可得 $\frac{S_3}{a_3}=1+2d$，所以 $d^2+d+1=1+2d$，即 $d^2-d=0$，所以 $d=0$ 或 $d=1$. 但是如果 $d=0$，则 $\frac{S_2}{a_2}=1+d=1$，从而 $a_1=0$，这与 $\{a_n\}$ 各项为正数矛盾，因此，必有 $d=1$，故 A 选项正确；

对于 B 选项，若 $d=\frac{1}{2}$，由②得，$\frac{n}{2}a_{n+1}=\frac{n+1}{2}a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，因此 $\frac{a_n}{n}=\cdots=\frac{a_1}{1}$，即 $a_n=na_1$，所以 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为公差的等差数列，故 B 选项正确；

对于 C 选项，若 $d>1$，因为 $\{a_n\}$ 各项为正数，所以由②可得，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+(n-1)d}{nd}=\frac{\frac{1}{d}+(n-1)}{n}<\frac{1+(n-1)}{n}=1$，所以 $\{a_n\}$ 是递减数列，故 C 选项正确；

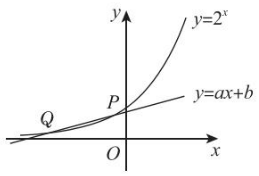
对于 D 选项，若 $d>1$，因为 $\{a_n\}$ 各项为正数，所以由②可得 $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}=\frac{(n+1)[1+(n-1)d]}{n^2d}=\frac{\frac{n+1}{d}+n^2-1}{n^2}$.

令 $n=1$，可得 $\frac{2\times a_2}{1\times a_1}=\frac{2}{d}$.

所以当 $d\in[2,+\infty)$ 时，$\frac{2\times a_2}{1\times a_1}\leqslant 1$，此时 $\{na_n\}$ 不是递增数列. 故 D 选项错误. 故选 ABC.

12. BC 【解析】研究 $f(x)$ 的零点等价于考虑曲线 $y=2^x$ 与直线 $y=ax+b$ 的交点，其中 a 是直线的斜率.

对于 AD 选项，取曲线 $y=2^x$ 上位于第二象限的点 P，Q，并固定点 P（如图所示）.



则当 Q 与 y 轴的距离充分大的时候，直线 PQ 的斜率 a 可以无限趋近于 0，并且直线 PQ 与 y 轴的交点位于 $(0,1)$ 的下方，于是当 $a>0$ 且 $0<b<1$ 时，曲线 $y=2^x$ 与直线 $y=ax+b$ 的交点的横坐标是负的，即 $f(x)$ 的零点都是负的，故 D 选项错误；而此时 $f(x)$ 存在负零点，但不满足 $b>1$，故 A 选项错误；

对于 B 选项，若 $a<0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，取 $x_1=\log_2(|b|+1)$，则 $x_1\geqslant 0$，所以 $f(x_1)\geqslant |b|+1-b>0$. 再取 $x_2=\frac{1+|b|}{a}$，则 $x_2<0$，所以 $f(x_2)<-ax_2-b+1=-|b|-b\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 有且只有一个零点，并且这个零点位于区间 (x_2,x_1) 中，B 选项正确；

对于C选项，若 $f(x)$ 有且只有两个正零点，因为 $f'(x)=2^x\ln 2-a$，而函数 $f'(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 至多只有一个极值点 x_0，且 $2^{x_0}\ln 2-a=0$，则这个极值点必为正，且 $f(x_0)<0$，并且 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，故必有 $f(0)>0$，即 $1-b>0$，解得 $b<1$，故C选项正确. 故选BC.

对于AB选项也可以作如下判断：

对于A选项，取 $a=-1,b=0$，函数 $f(x)=2^x+x$ 单调递增，而 $f(0)=1>0$，$f(-1)=-\frac{1}{2}<0$，所以 $f(x)$ 存在负零点，但不满足 $b>1$，故A选项错误；

对于B选项，若 $a<0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，所以 $f(x)$ 有且只有一个零点，故B选项正确.

13. $y=5x-4$ 【解析】因为 $f(x)=x^4e^{x-1}$，所以 $f(1)=1$，$f'(x)=(x^4+4x^3)e^{x-1}$，则 $f'(1)=5$，故函数 $f(x)=x^4e^{x-1}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=5(x-1)$，即 $y=5x-4$.

14. 7 【解析】由已知条件得，$|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9|\boldsymbol{b}|^2=100$，且 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9|\boldsymbol{b}|^2=16$，两式相减可得 $12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=84$. 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=7$.

15. π 【解析】$f'(x)=\cos x+\frac{a}{x}=\frac{x\cos x+a}{x}$. 由 $f(x)$ 的图象在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增，可知不等式 $f'(x)\geqslant 0$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上恒成立. 令 $g(x)=x\cos x+a$，则 $g'(x)=\cos x-x\sin x$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，故要使 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上恒成立，只需 $g(\pi)\geqslant 0$. 由 $g(\pi)=-\pi+a\geqslant 0$，解得 $a\geqslant\pi$，故实数 a 的取值范围为 $[\pi,+\infty)$，则 a 的最小值为 π.

16. $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ 【解析】令 $\omega x-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $f(x)$ 的所有零点为 $x=\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$. 设 $P(x_P,0)$，$Q(x_Q,0)$，并且 $x_Q-x_P=\frac{\pi}{\omega}>0$. 因为 $\angle PMQ$ 是钝角，所以 $M(x_M,1)$ 满足 $x_M\in(x_P,x_Q)$（否则，$\angle PMQ$ 是锐角）.

不妨取 $x_P=\frac{\pi}{6\omega}$，$x_Q=\frac{7\pi}{6\omega}$，令 $f(x_M)=1$，则 $\sin\left(\omega x_M-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由 $x\in(x_P,x_Q)$，可得 $x_M=\frac{\pi}{2\omega}$ 或 $x_M=\frac{5\pi}{6\omega}$. 根据对称性，不妨取 $x_M=\frac{\pi}{2\omega}$.

（方法1）在 $\triangle PMQ$ 中，$\angle MPQ+\angle MQP=\pi-\angle PMQ$，

所以 $\tan(\angle MPQ+\angle MQP)=-\tan\angle PMQ=\sqrt{2}$.

因为 $\tan\angle MPQ=\frac{1}{x_M-x_P}=\frac{3\omega}{\pi}$，$\tan\angle MQP=\frac{1}{x_Q-x_M}=\frac{3\omega}{2\pi}$，所以 $\tan(\angle MPQ+\angle MQP)=$

$$\frac{\tan\angle MPQ+\tan\angle MQP}{1-\tan\angle MPQ\cdot\tan\angle MQP}=\frac{\frac{3\omega}{\pi}+\frac{3\omega}{2\pi}}{1-\frac{3\omega}{\pi}\cdot\frac{3\omega}{2\pi}}=\frac{\frac{9\omega}{2\pi}}{1-\frac{9\omega^2}{2\pi^2}}=\sqrt{2},$$

即 $\frac{9\sqrt{2}\omega^2}{2\pi^2}+\frac{9\omega}{2\pi}-\sqrt{2}=0$.

所以根据二次函数求根公式可得

$$\frac{\omega}{\pi}=\frac{-\frac{9}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2-4\times\frac{9\sqrt{2}}{2}\times(-\sqrt{2})}}{2\times\frac{9\sqrt{2}}{2}}=\frac{-\frac{9}{2}\pm\frac{15}{2}}{9\sqrt{2}}.$$

而 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{-\frac{9}{2}+\frac{15}{2}}{9\sqrt{2}}\pi=\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

（方法2）因为 $\tan\angle PMQ=-\sqrt{2}$，所以 $\cos\angle PMQ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

在 $\triangle PMQ$ 中，$|PM|^2=(x_M-x_P)^2+1^2=\frac{\pi^2}{9\omega^2}+1$，$|QM|^2=(x_M-x_Q)^2+1^2=\frac{4\pi^2}{9\omega^2}+1$，$|PQ|=\frac{\pi}{\omega}$. 由余弦定理得，$|PQ|^2=|PM|^2+|QM|^2-2|PM|\cdot|QM|\cos\angle PMQ$，

即 $\frac{\pi^2}{\omega^2}=\frac{\pi^2}{9\omega^2}+1+\frac{4\pi^2}{9\omega^2}+1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{9\omega^2}+1\right)\left(\frac{4\pi^2}{9\omega^2}+1\right)}$,

即 $\frac{4\pi^2}{9\omega^2}-2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{9\omega^2}+1\right)\left(\frac{4\pi^2}{9\omega^2}+1\right)}$,

即 $\left(\frac{4\pi^2}{9\omega^2}-2\right)^2=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi^2}{9\omega^2}+1\right)\left(\frac{4\pi^2}{9\omega^2}+1\right)$,

即 $\frac{32\pi^4}{81\omega^4}-\frac{68\pi^2}{9\omega^2}+8=0$.

把它看成关于 $\frac{\pi^2}{\omega^2}$ 的二次方程,

解得 $\frac{\pi^2}{\omega^2}=\frac{\frac{68}{9}\pm\sqrt{\left(\frac{68}{9}\right)^2-4\times8\times\frac{32}{81}}}{2\times\frac{32}{81}}=\frac{9}{8}$ 或 18.

又 $\frac{4\pi^2}{9\omega^2}-2\geqslant0$,即 $\frac{\pi^2}{\omega^2}\geqslant\frac{9}{2}$,因此 $\frac{\pi^2}{\omega^2}=18$,

得 $\omega=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

17. **解**:(1)由题意,得 $\overrightarrow{AB}=(3,4)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1)$, (1 分)

所以 $\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=(3-t,4+t)$,

$\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC}=(3+t,4-t)$. (2 分)

因为 $(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\perp(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC})$,

所以 $(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC})=0$, (3 分)

即 $(3-t)(3+t)+(4+t)(4-t)=0$, (4 分)

即 $9-t^2+16-t^2=0$,又 $t>0$,故 $t=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. (5 分)

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-1)+4\times1=1$,$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$. (6 分)

由投影向量的定义得,$\boldsymbol{u}=\lambda\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$,

其中,$\lambda=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. (8 分)

所以 $\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. (10 分)

18. **解**:(1)由于 $A+B+C=\pi$,

所以 $\tan C=\tan(\pi-A-B)=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$. (1 分)

由 $3\tan A+3\tan B+2\tan C=0$,得 $(\tan A+\tan B)\cdot\left(3-\frac{2}{1-\tan A\tan B}\right)=0$. (2 分)

因为 $C\in(0,\pi)$,

所以 $\tan A+\tan B=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}\neq0$. (3 分)

故 $3-\frac{2}{1-\tan A\tan B}=0$,

解得 $\tan A\tan B=\frac{1}{3}$. (5 分)

(2)(方法 1)因为 $\tan A+\tan B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\tan C=-\frac{3}{2}(\tan A+\tan B)=-\sqrt{3}$.

而 $C\in(0,\pi)$,故 $C=\frac{2\pi}{3}$. (6 分)

所以 $\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=-\frac{1}{2}$.① (7 分)

由(1)知,$\sin A\sin B=\frac{1}{3}\cos A\cos B$.②

由①②可得 $\sin A\sin B=\frac{1}{4}$,$\cos A\cos B=\frac{3}{4}$. (8 分)

设△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.

由于△ABC 面积为 $\sqrt{3}$,所以 $\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$. (9 分)

又 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

因此 $\frac{1}{2}\cdot\frac{c\sin A}{\sin C}\cdot\frac{c\sin B}{\sin C}\sin C=\sqrt{3}$,

即 $c^2\sin A\sin B=2\sqrt{3}\sin C$, (10 分)

又 $\sin A\sin B=\frac{1}{4}$,$\sin C=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $c=2\sqrt{3}$,

即 AB 的长度为 $2\sqrt{3}$. (12 分)

(方法 2)因为 $\tan A+\tan B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\tan C=-\frac{3}{2}(\tan A+\tan B)=-\sqrt{3}$.

而 $C\in(0,\pi)$，故 $C=\frac{2\pi}{3}$. （6 分）

设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，得 $ab=4$，（7 分）

因为 $\tan A+\tan B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\tan A\tan B=\frac{1}{3}$，

得 $\tan A=\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$， （8 分）

故 $A=B=\frac{\pi}{6}$，$a=b=2$， （10 分）

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，

解得 $c=2\sqrt{3}$，即 AB 的长度为 $2\sqrt{3}$. （12 分）

19. **解**：(1) 设 $g(x)=f(x)-1=\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2-4ax$.

由题意知，$g(x)$ 是奇函数，所以 $-g(x)=g(-x)$， （1 分）

即对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $-\left[\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2-4ax\right]=-\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2+4ax$. （2 分）

化简得 $(1-a)x^2=(a-1)x^2$. （3 分）

所以 $a-1=0$，即 $a=1$. （4 分）

(2)（方法 1）$f'(x)=x^2+2(a-1)x-4a=(x-2)(x+2a)$. （5 分）

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 1，

故 $f(1)=\frac{1}{3}+(a-1)-4a+1\geqslant 1$，

解得 $a\leqslant-\frac{2}{9}$. （6 分）

当 $x\in[0,1]$ 时，$x-2<0$.

若 $-\frac{1}{2}<a\leqslant-\frac{2}{9}$，则 $-2a\in\left[\frac{4}{9},1\right)$. （7 分）

当 $x\in(0,-2a)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(-2a,1)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,-2a)$ 上单调递增，在 $(-2a,1)$ 上单调递减. （8 分）

而 $f(0)=1$，$f(1)\geqslant 1$，因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 1，满足题意. （9 分）

若 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，则 $-2a\geqslant 1$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增， （10 分）

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(0)=1$，满足题意. （11 分）

综上所述，a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{2}{9}\right]$. （12 分）

（方法 2）由题意知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2-4ax+1\geqslant 1$，$x\in[0,1]$，即 $\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2-4ax\geqslant 0$，即 $\frac{1}{3}x^2+(a-1)x-4a\geqslant 0$， （5 分）

令 $m(x)=\frac{1}{3}x^2+(a-1)x-4a$，分情况讨论，

① $\begin{cases}\frac{3(1-a)}{2}>1,\\ m(1)=\frac{1}{3}+a-1-4a\geqslant 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a<\frac{1}{3},\\ a\leqslant-\frac{2}{9}.\end{cases}$ 故 $a\leqslant-\frac{2}{9}$； （7 分）

② $\begin{cases}0\leqslant\frac{3(1-a)}{2}\leqslant 1,\\ m\left[\frac{3(1-a)}{2}\right]=\frac{3(1-a)^2}{4}-\frac{3(1-a)^2}{2}-4a\geqslant 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1,\\ -3\leqslant a\leqslant-\frac{1}{3},\end{cases}$ 无解； （9 分）

③ $\begin{cases}\frac{3(1-a)}{2}<0,\\ m(0)=-4a\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>1,\\ a\leqslant 0,\end{cases}$ 无解. （11 分）

综上所述，a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{2}{9}\right]$. （12 分）

20. **解**：(1) $g(x)$ 的定义域为 $\{x\mid\cos x\neq 1\}=\{x\mid x\neq 2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$. （1 分）

因为 $f(x)=2\cos^2x(\cos x+a)=2\cos^3x+2a\cos^2x$，所以当 $\cos x\neq 1$ 时，

$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{\cos x-1}=\frac{2(\cos^3x-1)}{\cos x-1}+\frac{2a(\cos^2x-1)}{\cos x-1}=2(\cos^2x+\cos x+1)+2a(\cos x+1)$. （2 分）

设函数 $u(t)=2(t^2+t+1)+2a(t+1)=2\left(t+\frac{a+1}{2}\right)^2+2(a+1)-\frac{(a+1)^2}{2}$，则 $u(t)$ 是二次函数，$t\in[-1,1)$ 时恰好满足 $g(x)=u(\cos x)=$

$u(t)$.　　(3 分)

$g(x)$的值域与$u(t)$在$[-1,1)$上的值域相同，故可讨论$u(t)$在$[-1,1)$上的值域.

因为$a\in(-1,1)$，故$-\frac{a+1}{2}\in(-1,0)$，则$u(t)$在$[-1,1)$上的最小值为$u\left(-\frac{a+1}{2}\right)=-\frac{1}{2}a^2+a+\frac{3}{2}$，又$u(1)=4a+6$，　　(4 分)

则$u(t)\in\left[-\frac{1}{2}a^2+a+\frac{3}{2},4a+6\right)$，即$g(x)$的值域为$\left[-\frac{1}{2}a^2+a+\frac{3}{2},4a+6\right)$.　　(5 分)

(2)存在，证明如下：

因为$D\cap\mathbf{Z}$有且只有2个元素，而$u(-1)=2$，

所以D是区间$(0,4)$的子集.　　(6 分)

由(2)知，$u(t)$在$\left[-1,-\frac{a+1}{2}\right)$上单调递减，在$\left[-\frac{a+1}{2},1\right)$上单调递增，且$u(t)\in\left[-\frac{1}{2}a^2+a+\frac{3}{2},4a+6\right)$，

故$u(1)=4a+6\in(2,4]$，

则$a\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$.　　(7 分)

$D\cap\mathbf{Z}$有且只有2个元素可分成下面2种情况：

①若$D\cap\mathbf{Z}=\{1,2\}$，此时$u(1)=4a+6\in(2,3]$且$u\left(-\frac{a+1}{2}\right)=-\frac{1}{2}a^2+a+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(a-1)^2+2\in(0,1]$，

解得$a\in\left(-1,-\frac{3}{4}\right]$；　　(9 分)

②若$D\cap\mathbf{Z}=\{2,3\}$，$u(1)=4a+6\in(3,4]$且$u\left(-\frac{a+1}{2}\right)=-\frac{1}{2}a^2+a+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(a-1)^2+2\in(1,2]$，无解.　　(11 分)

综上，a的取值范围是$\left(-1,-\frac{3}{4}\right]$.　　(12 分)

21. **解**：(1)设$\{b_n\}$的公比为q，

则$b_2+b_4=(b_1+b_3)q$，

代入$b_1+b_3=5$，$b_2+b_4=\frac{5}{2}$，

可得$q=\frac{1}{2}$.　　(1 分)

又由$b_1+b_3=b_1(1+q^2)=5$，

得$b_1=4$.　　(2 分)

则$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{3-n}$.

(4 分)

(2)(ⅰ)因为对任意$n\in\mathbf{N}^*$，a_{3n-2}，a_{3n-1}，a_{3n}，a_{3n+1}成等差数列，

所以$a_{3n-1}+a_{3n}=a_{3n-2}+a_{3n+1}$.　　(5 分)

$S_1=a_1=b_1=4$；　　(6 分)

$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=2a_1+2a_4=2(b_1+b_2)=12$.　　(7 分)

(ⅱ)当$n\geqslant3$时，

$S_{3n-2}=a_1+(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{3n-4}+a_{3n-3}+a_{3n-2})$

$=a_1+(a_1+a_4+a_4)+(a_4+a_7+a_7)+\cdots+(a_{3n-5}+a_{3n-2}+a_{3n-2})$　　(8 分)

$=2a_1+3a_4+3a_7+\cdots+3a_{3n-5}+2a_{3n-2}$

$=2b_1+3b_2+3b_3+\cdots+3b_{n-1}+2b_n$　　(9 分)

$=3\times\frac{4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-b_1-b_n$

$=24-24\left(\frac{1}{2}\right)^n-4-2^{3-n}$

$=20-2^{5-n}$.　　(11 分)

当$n=1,2$时上式也成立，因此，对任意正整数n，$S_{3n-2}=20-2^{5-n}$.　　(12 分)

22. **解**：(1)若$a=1$，则$f(x)=x\ln(1+x)-x^2$，

$f(x)$的定义域是$(-1,+\infty)$.

$f'(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-2x$.　　(1 分)

令$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-2=\frac{-x(2x+3)}{(1+x)^2}$.　　(2 分)

当$x\in(-1,0)$时，$g'(x)>0$；当$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(-1,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减.　　(3 分)

因为$g(0)=0$，所以当$x\in(-1,+\infty)$时，$f'(x)=g(x)\leqslant g(0)=0$恒成立，

当且仅当$x=0$时等号成立.

所以$f(x)$的单调递减区间为$(-1,+\infty)$，无单调递增区间.　　(4 分)

(2)$f(x)$的定义域为$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$，$f'(x)=$

$\ln(1+ax)+\dfrac{ax}{1+ax}-2x$. (5 分)

由(1)得,当 $x>0$ 时,$x\ln(1+x)-x^2<0$,即$\ln(1+x)<x$;

当 $x<0$ 时,$x\ln(1+x)-x^2>0$,即 $\ln(1+x)<x$.

所以当 $x\neq 0$ 时,$\ln(1+x)<x$.

因此,当 $x\neq 0$ 时,

$f'(x)=\ln(1+ax)+\dfrac{ax}{1+ax}-2x<ax+\dfrac{ax}{1+ax}-2x=x\left(a-2+\dfrac{a}{1+ax}\right)$. ① (6 分)

(i)若 $0<a\leqslant 1$,则当 $x>0$ 时,由①可得 $f'(x)<x(2a-2)\leqslant 0$.

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,

故 $x=0$ 不可能为 $f(x)$的极小值点. (7 分)

(ii)若 $a>1$,

当$-\dfrac{1}{a}<x<0$ 时,$0<1+ax<1$,

所以 $a-2+\dfrac{a}{1+ax}>2a-2>0$,

则由①可得 $f'(x)<x(2a-2)<0$; (9 分)

当 $0<x<\dfrac{a-1}{2a}$时,$1<1+ax<\dfrac{a+1}{2}$,

设 $m(x)=f'(x)=\ln(1+ax)+\dfrac{ax}{1+ax}-2x$,

则 $m'(x)=\dfrac{a}{1+ax}+\dfrac{a}{(1+ax)^2}-2>\dfrac{2a}{a+1}+\dfrac{4a}{(a+1)^2}-2=\dfrac{2(a-1)}{(a+1)^2}>0$,

所以 $m(x)$在区间$\left(0,\dfrac{a-1}{2a}\right)$上单调递增,

从而 $f'(x)=m(x)>m(0)=0$. (10 分)

故 $f(x)$在$\left(-\dfrac{1}{a},0\right)$上单调递减,在$\left(0,\dfrac{a-1}{2a}\right)$上单调递增,

所以 $x=0$ 为 $f(x)$的极小值点. (11 分)

综上所述,a 的取值范围为$(1,+\infty)$. (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。