湖北省高中名校联盟2024届高三第二次联合测评

数学试卷

命题单位：襄阳五中数学学科组　　审题单位：圆创教育研究中心　宜昌市夷陵中学

本试卷共4页，22题。满分150分。考试用时120分钟。　　考试时间：2023年11月14日下午15:00—17:00

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题（本大题共8题，每小题5分，共计40分. 每小题列出的四个选项中只有一项是最符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}$，$B=\{x|\sqrt{x-1}<1\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $[-1,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-2,2)$　　D. $[1,2)$

2. 已知复数 $z=\dfrac{4+2i}{1-i}$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 为（　　）

A. $1+3i$　　B. $-1+3i$　　C. $1-3i$　　D. $-1-3i$

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是（　　）

A. $\left(\dfrac{-2\sqrt{5}}{5},\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$　　B. $\left(-\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right)$

C. $\left(\dfrac{2}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$　　D. $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

4. 按从小到大顺序排列的两组数据：甲组：27，31，37，m，42，49；乙组：24，n，33，44，48，52，若这两组数据的第30百分位数、第50百分位数都分别对应相等，则 $m+n=$（　　）

A. 60　　B. 65　　C. 70　　D. 71

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1+a_3+a_4=24$，则 $\dfrac{1}{2}a_2+a_3=$（　　）

A. 12　　B. 24　　C. 26　　D. 36

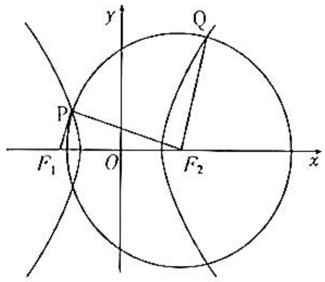
6. 关于 x 的不等式 $e^x(x-a)\leqslant x$ 在 $[-1,1]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[1-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$　　B. $[e-1,+\infty)$　　C. $\left(-\infty,1-\dfrac{1}{e}\right]$　　D. $(-\infty,e-1]$

7. 已知 $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $3\sin\alpha=\sin(2\beta-\alpha)$，则 $\tan\alpha$ 的最大值为（　　）

A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

8. 如图，已知 F_1，F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，以 F_2 为圆心的圆与双曲线左右两支交于 P、Q 两点，且 $\overrightarrow{F_2Q}=3\overrightarrow{F_1P}$ 则双曲线 C 的离心率为（　　）



A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

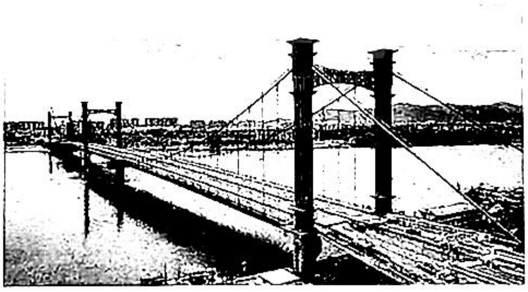
二、多项选择题（本大题共 4 题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题列出的四个选项中，有多项是符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 关于二项式 $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^8$ 的展开式，下列结论正确的是（　　）

A. 展开式所有项的系数和为 -1　　B. 展开式二项式系数和为 256

C. 展开式中第 5 项为 $1120x^4$　　D. 展开式中不含常数项

10. 如图为襄阳凤雏大桥，连接襄阳襄城、樊城，既缓解交通压力又是汉江上美丽的风景线，她的悬链类似双曲函数的图像．常见的有双曲正弦函数 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$．下列结论正确的是（　　）



A. $(\cosh x)^2-(\sinh x)^2=1$

B. 双曲正弦函数是奇函数，双曲余弦函数是偶函数

C. 若点 P 在曲线 $y=\sinh x$ 上，α 为曲线在点 P 处切线的倾斜角，则 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

D. $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$

11. 设 $k\in\mathbf{R}$，过定点 A 的动直线 $l_1:x+ky=0$ 与过定点 B 的动直线 $l_2:kx-y+3-k=0$ 交于点 P，则下列说法正确的有（　　）

A. $|PA|^2+|PB|^2=16$　　B. $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{5}{2}$

C. $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}\geqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $|PA|+\sqrt{3}|PB|$ 的最大值为 $2\sqrt{10}$

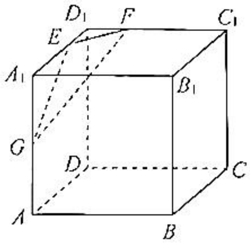
12. 如图,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4,点 E、F、G 分别在棱 D_1A_1、D_1C_1、A_1A 上,满足 $\frac{D_1E}{D_1A_1}=\frac{D_1F}{D_1C_1}=\frac{1}{4}$,$\frac{A_1G}{A_1A}=\lambda(\lambda>0)$,记平面 EFG 与平面 A_1B_1CD 的交线为 l,则(　　)

A. 存在 $\lambda\in(0,1)$ 使得平面 EFG 截正方体所得截面图形为四边形

B. 当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时,三棱锥 $B-EFG$ 体积为 $\frac{3}{2}$

C. 当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时,三棱锥 A_1-EFG 的外接球表面积为 34π

D. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,l 与平面 $ABCD$ 所成的角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{33}}{33}$



三、填空题:本大题共 4 题,每小题 5 分,共计 20 分

13. 抛物线 $y=2x^2$ 的焦点坐标为________.

14. 在圆锥 PO 中,O 为底面圆心,PA,PB 为圆锥的母线,且 $AB=2$,若棱锥 $O-PAB$ 为正三棱锥,则该圆锥的体积为________.

15. 已知 $\omega>0$,函数 $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减,则实数 ω 的取值范围是________.

16. 对于任意的实数 x,y,函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x+y)=f(x^2)+f(2y)$,则 $f(2)=$________.

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答需写出必要的解题过程或文字说明,17 题 10 分,其余每题各 12 分

17. (10 分)已知数列 $\{a_n\}$ 首项 $a_1=\frac{3}{5}$,且满足 $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$.

(1)求证:数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 为等比数列,并求 $\{a_n\}$ 的通项;

(2)若不等式 $\lambda a_n<a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立,求实数 λ 的取值范围.

18. (12 分)在 $\triangle ABC$ 中,内角 A、B、C 的对边分别为 a,b,c,角 A 的平分线交 BC 于 D,$AD=\frac{6}{5}$,$A=\frac{2\pi}{3}$.

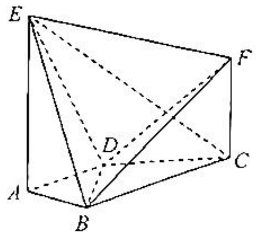
(1)若 $b=2$,求 a 的值;

(2)求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.

19. (12 分)如图,$AE\perp$ 平面 $ABCD$,$CF/\!/AE$,$AD/\!/BC$,$AD\perp AB$,$AB=AD=1$,$AE=BC=2$.

(1)求点 C 到平面 ADE 的距离;

(2)当平面 EBD 与平面 BDF 垂直时,求线段 CF 的长.



20. (12 分)移动物联网广泛应用于生产制造、公共服务、个人消费等领域. 截至 2022 年底，我国移动物联网连接数达 18.45 亿户，成为全球主要经济体中首个实现"物超人"的国家. 现有 2018～2022 年移动物联网连接数 w 与年份代码 t 的散点图，其中年份 2018～2022 对应的 t 分别为 1～5.

(1)根据参考数据计算样本相关系数(精确到 0.01)；

(2)令变量 $x=t-\overline{t}$，$y=w-\overline{w}$，利用(1)中结论求 y 关于 x 的经验回归方程，并预测 2024 年移动物联网连接数.

附注：(i)回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 中斜率和截距最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$. 样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(w_i-\overline{w})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(w_i-\overline{w})^2}}$；

(ii)参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{5}(w_i-\overline{w})^2=76.9$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\overline{t})(w_i-\overline{w})=27.2$，$\sum\limits_{i=1}^{5}w_i=60.8$，$\sqrt{769}\approx 27.7$

21. (12 分)已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点 $P(2,1)$在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)过 P 作两条相互垂直的直线 PA，PB 分别交椭圆 C 于另一点 A，B，求证直线 AB 过定点，并求点 P 到直线 AB 的距离最大值.

22. (12 分)已知函数 $f(x)=-\ln x+\dfrac{1}{2}ax^2+x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)设 $f(x)$在 $P(x_0,f(x_0))$处的切线方程为 $y=g(x)$，若 $\forall x>0$，要么 $(x-x_0)[f(x)-g(x)]>0$ 恒成立，要么 $(x-x_0)[f(x)-g(x)]<0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

湖北省高中名校联盟2024届高三第二次联合测评

数学试卷参考答案与评分细则

1. A 【解析】$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|1\leqslant x<2\}$，$A\cup B=[-1,2]$，选 A

2. C 【解析】$z=\dfrac{(4+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2+6i}{2}=1+3i$，$\bar{z}=1-3i$. 选 C.

3. B 【解析】$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{(-1,2)}{\sqrt{5}}=\left(-\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right)$. 选 B.

4. D 【解析】由 $6\times30\%=1.8$，第 30 百分位数是第 2 个数据故 $31=n$

由 $6\times50\%=3$，第 50 百分位数是第 3 与 4 个数据平均值 $\dfrac{37+m}{2}=\dfrac{33+44}{2}$，

$\therefore m=40$. $\therefore m+n=71$ 选 D.

5. A 【解析】$a_1+a_3+a_4=a_2+a_3+a_3=24$ 故 $\dfrac{1}{2}a_2+a_3=12$. 选 A.

6. B 【解析】若 p 为真，$a\geqslant x-\dfrac{x}{e^x}=h(x)$ 恒成立，则 $a\geqslant h(x)_{max}$，由于 $h'(x)=\dfrac{e^x+x-1}{e^x}$，$p(x)=e^x+x-1$ 递增，$p(0)=0$，$-1\leqslant x<0$ 时

$p(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减，$0<x\leqslant1$ 时

$p(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增，$h(1)=1-\dfrac{1}{e}$，$h(-1)=e-1$，$h(x)_{max}=h(-1)=e-1$，

$\therefore a\geqslant e-1$，选 B

7. B 【解析】$3\sin\alpha=\sin2\beta\cos\alpha-\cos2\beta\sin\alpha$，$(3+\cos2\beta)+\cos\alpha=\sin2\beta$；$\tan\alpha=\dfrac{\sin2\beta}{3+\cos2\beta}$

令 $t=\tan\beta$，则 $\tan\alpha=\dfrac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\dfrac{2t}{4+2t^2}=\dfrac{1}{t+\dfrac{2}{t}}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. 选 B.

8. D 【解析】延长 QF_2 与双曲线交于点 P'，

因为 $F_1P\parallel F_2P'$，根据对称性可知 $|F_1P|=|F_2P'|$，

设 $|F_2P'|=|F_1P|=t$，则 $|F_2P|=|F_2Q|=3t$，

可得 $|F_2P|-|F_1P|=2t=2a$，即 $t=a$，

所以 $|P'Q|=4t=4a$，则 $|QF_1|=|QF_2|+2a=5a$，$|F_1P'|=|F_2P|=3a$，

即 $|P'Q|^2+|F_1P'|^2=|QF_1|^2$，可知 $\angle F_1P'Q=\angle F_1PF_2=90^\circ$，

在 $\triangle P'F_1F_2$ 中，由勾股定理得 $|F_2P'|^2+|F_1P'|^2=|F_1F_2|^2$，

即 $a^2+(3a)^2=4c^2$，解得 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. 故选：D.

9. BCD 【解析】A 中：取 $x=1$. 有 $(-1)^8=1$，A 错

B 中：$2^8=256$，B 对

C 中：由 $T_{k+1}=C_8^k(x^2)^{8-k}(-2x^{-1})^k=(-2)^kC_8^kx^{16-3k}(k=0,1,2\cdots\cdots 8)$ 则 $k=4$ 时 $(-2)^4C_8^4x^4=1120x^4$ C 对

D 中：由已知可知 $16-3k\neq 0$ 恒成立 D 对

10. ABC 【解析】A 中：左边 $=(\cosh x+\sinh x)\cdot(\cosh x-\sinh x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=e^x\cdot e^{-x}=1$

A 对

B 中：$x\in R$ 关于 $(0,0)$ 对称且有 $\sinh x(1-x)=-\sinh x$，$\cosh(x)=\cosh(x)$ 恒成立 B 对

C 中：$f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\geqslant 1$ C 对

D 中：左边 $=\frac{e^{x+y}-e^{(-x-y)}}{2}$，右边 $=\frac{(e^{x+y}+e^{x-y}+e^{y-x}+e^{-x-y})-(e^{x+y}+e^{-x-y}-e^{x-y})}{2\times 2}=$

$\frac{2e^{x-y}+2e^{y-x}}{4}=\frac{e^{x-y}+e^{y-x}}{2}$，左边≠右边 D 错

11. BCD 【解析】A 中：由 $A(0,0)$，$B(1,3)$ 知：$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=10$.

B 中：$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|PA|\cdot|PB|\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{2}=\frac{5}{2}$ B 对

C 中：由 $a>0,b>0$ 知：$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 知：$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}\geqslant\frac{2}{5}\sqrt{5}$ C 对

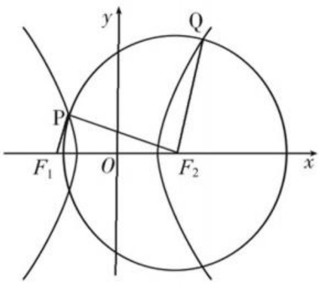
对于 D，在 Rt△ABP 中，$|AP|^2+|BP|^2=|AB|^2=(1-0)^2+(3-0)^2=10$，

设 $|AP|=\sqrt{10}\cos\theta$，$|BP|=\sqrt{10}\sin\theta$

所以 $|AP|+\sqrt{3}|BP|=2\sqrt{10}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2\sqrt{10}$，故 D 正确.

故选：BCD.

12. BD 【解析】设正方体的棱长为 4，以 D 为原点，以 DA、DC、DD_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示：

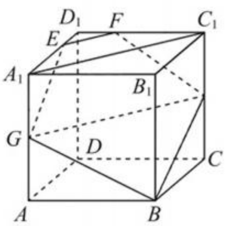


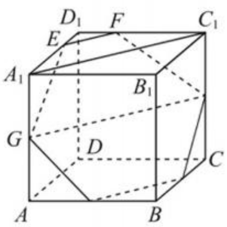
对于 A 选项，

$\lambda=1$ 时，G 在 A 点，$\frac{D_1E}{D_1A_1}=\frac{D_1F}{D_1C_1}=\frac{1}{4}$，由 $EF/\!/A_1C_1$ 可知 $EF/\!/AC$，

所以截面 EFG 即为四边形 $EFCA$；

$\lambda\in(0,1)$ 由图形知，截面 EFG 为五边形或六边形. 故 A 错误.





对于 B 选项，当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时，$\frac{A_1G}{A_1A}=\frac{3}{4}=\frac{A_1E}{A_1D_1}$，所以 $EG/\!/D_1A/\!/C_1B$，

所以 $C_1B/\!/$平面 EFG，$V_{B-EFG}=V_{C_1-EFG}=V_{G-C_1EF}$，

又 $GA_1\perp$ 平面 EFC_1，所以 $V_{G-C_1EF}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1EF}\cdot GA_1=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times1\right)\times3=\frac{3}{2}$，

三棱锥 $B-EFG$ 体积为 $\frac{3}{2}$，故 B 正确.

对于 C 选项，当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时，$A_1G=A_1E$ 且 $A_1B_1\perp$ 平面 A_1EG，

所以根据球的性质容易判断，三棱锥 A_1-EFG 的外接球的球心在过线段 EG 的中点，

且垂直于平面 A_1D_1DA 的直线上，$E(1,0,4)$，$G(4,0,1)$，所以 EG 的中点 $M\left(\frac{5}{2},0,\frac{5}{2}\right)$，可记球心

$O\left(\frac{5}{2},t,\frac{5}{2}\right)$，$F(0,1,4)$，外接球的半径 $r=|OE|=|OF|=\sqrt{\frac{9}{4}+t^2+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}+(t-1)^2+\frac{9}{4}}$，解得

$t=\frac{5}{2}$，$r=\frac{\sqrt{43}}{2}$，

所以三棱锥 A_1-EFG 的外接球表表面积为 43π，故 C 错误.

对于 D 选项，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$B(4,4,0)$，$C_1(0,4,4)$，$G(4,0,2)$，$E(1,0,4)$，$F(0,1,4)$，

所以 $\overrightarrow{BC_1}=(-4,0,4)$，$\overrightarrow{GE}=(-3,0,2)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$，

设平面 EFG 的一个法向量为 $\vec{p}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{p}\cdot\overrightarrow{GE}=-3x_1+2z_1=0\\ \vec{p}\cdot\overrightarrow{EF}=-x_1+y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=2$，

则 $y_1=2$，$z_1=3$，所以可取 $\vec{p}=(2,2,3)$，

由 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1CD 知，平面 A_1B_1CD 的法向量为 $\overrightarrow{BC_1}=(-4,0,4)$，

记平面 EFG 与平面 A_1B_1CD 的交线 l 的一个方向向量为 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\vec{p}=2x_2+2y_2+3z_2=0\\ \vec{p}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-4x_2+4z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=2$，则 $y_2=-5$，$z_2=2$，所以可取 $\vec{m}=(2,-5,2)$，

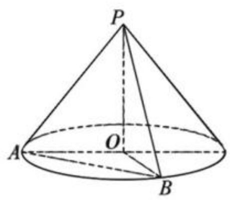
又平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，则 $\vec{m}\cdot\vec{n}=2$，$|\vec{m}|=\sqrt{33}$，$|\vec{n}|=1$，

设 l 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{33}}=\frac{2\sqrt{33}}{33}$，故 D 正确.

故选：BD.

13. $\left(0,\frac{1}{8}\right)$ 【解析】由 $x^2=\frac{1}{2}y$ 可知：$2p=\frac{1}{2}$. 即 $\frac{p}{2}=\frac{1}{8}$ 焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{8}\right)$

14. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ 【解析】因为棱锥 $O-PAB$ 为正三棱锥，



所以 $PA=PB=AB=2$，

$OA=OB=OP$，

因为 $PO\perp AO$，$PO\perp OB$，由勾股定理得 $OA=OB=OP=\sqrt{2}$，

即圆锥的底面圆半径 $r=\sqrt{2}$，则 $V_{锥}=\frac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

15. $\left[\frac{1}{3},\frac{7}{6}\right]$ 【解析】$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，

因为 $\omega>0$，函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}<\omega x+\frac{\pi}{3}<\omega\pi+\frac{\pi}{3}$，

所以 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$，解得 $\frac{1}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}$.

故答案为：$\frac{1}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{6}$

16. 0 【解析】取 $x=y$，则有 $f(2x)=f(x^2)+f(2x)$，则 $f(x^2)=0$ 恒成立. $f(2)=0$

17. 解：(1) $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$ 取倒数 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{2}{3}$

变形 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，而 $\frac{1}{a_1}-1=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$

∴数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是以首项 $\frac{1}{a_1}-1=\frac{2}{3}$，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列. ………………………………… (3 分)

$\therefore\frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\therefore a_n=\frac{1}{1+2\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{3^n}{3^n+2}$ ………………………………………………………………………… (6 分)

(2) 若 $\lambda a_n<a_{n+1}$. 则 $\lambda\cdot\frac{3^n}{3^n+2}<\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}+2}(n\geqslant1)$

$\therefore\lambda<\frac{3(3^n+2)}{3^{n+1}+2}=\frac{3^{n+1}+6}{3^{n+1}+2}=1+\frac{1}{3^{n+1}}$

而 $f(n)=1+\frac{4}{3^{n+1}+2}$ 是 $n\in\mathbf{N}^*$ 时的递减数列，$\therefore f(n)>1$，故 $\lambda\leqslant1$. ………………………… (10 分)

18. 解：(1) ∵∠A 平分线为 AD，由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(b+c)\cdot AD\sin\frac{A}{2}$，

得 $AD=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{bc}{b+c}=\frac{6}{5}$，若 $b=2$，则 $\frac{2c}{2+c}=\frac{6}{5}$，则 $c=3$.

在△ABC 中，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+9+6=19$，所以 $a=\sqrt{19}$. …………… (6 分)

(2) 因为 $\frac{bc}{b+c}=\frac{6}{5}$，则 $\frac{6}{5}\leqslant\frac{bc}{2\sqrt{bc}}=\frac{\sqrt{bc}}{2}$，所以 $bc\geqslant\left(\frac{12}{5}\right)^2$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立.

因此 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{36\sqrt{3}}{25}$ ……………………………………………………… (12 分)

19. 解：(1) ∵$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$

∴$AE\perp AB$，又 $AD\perp AB$，∴$AB\perp$ 平面 ADE，又 $AD/\!/BC$

∴点 C 到平面 ADE 距离为 d=AB=1;(也可利用等体积法求距离) …………………………… (4 分)

(2)依题意,建立以 A 为原点,分别以 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴,y 轴,z 轴正方向的空间直角坐标系(如图),可得 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(1,2,0)$,$D(0,1,0)$,$E(0,0,2)$.

设 $CF=h(h>0)$,则 $F(1,2,h)$.

依题意,$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$

设 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$为平面 BDE 的法向量,

则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}-x+y=0\\ -x+2z=0\end{cases}$,令 $z=1$,可得 $\overrightarrow{n}=(2,2,1)$,

设 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$为平面 BDF 的法向量,

则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}-x+y=0\\ 2y+hz=0\end{cases}$. 令 y=1,可得 $\overrightarrow{m}=\left(1,1,-\frac{2}{h}\right)$.

由 $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}=0$ 得 $h=\frac{1}{2}$,所以,线段 CF 的长为$\frac{1}{2}$. ………………………………………………… (12 分)

20. 解:(1)根据给定数据.

因为 $\bar{t}=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3$,

所以$\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2=(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2=10$,

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(w_i-\bar{w})^2}}=\dfrac{27.2}{\sqrt{10\times76.9}}=\dfrac{27.2}{\sqrt{769}}\approx\dfrac{27.2}{27.7}\approx0.98$ ……………………… (6 分)

(2)由(1)知 $b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(w_i-\bar{w})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2}=\dfrac{27.2}{10}=2.72$,

所以 y 关于 x 的经验回归方程 $y=2.72x$,又 $\bar{w}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}w_i}{5}=\dfrac{60.8}{5}=12.16$,

所以当 $t=7$ 时,则 $x=7-3=4$,$w=y+\bar{w}=2.72\times4+12.16=23.04$,

所以预测 2024 年移动物联网连接数 23.04 亿户. ………………………………………………… (12 分)

21. 解:(1)∵$\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,$\begin{cases}a=\sqrt{2}t\\ c=t\end{cases}$,则 $b=t(t>0)$,已知$\frac{x^2}{2t^2}+\frac{y^2}{t^2}=1$ 过(2,1)∴$t^2=3$

∴椭圆 C:$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ ………………………………………………………………………… (4 分)

(2)当斜率 k 不存在时:$A(x_0,y_0)$. $B(x_0-y_0)$

由 $PA\perp PB$ 知:$(2-x_0,1-y_0)(2-x_0,1+y_0)=0$ 有:$(2-x_0)^2+1-y_0{}^2=1$

代入 $y_0{}^2=3\left(1-\frac{x_0{}^2}{6}\right)$知 $3x_0{}^2-8x_0+4=0$. 可得 $x_0=2$ 或 $x_0=\frac{2}{3}$

但 $x_0=2$ 时与 P 重合舍去,∴此时 $x_0=\frac{2}{3}$

当斜率 k 存在时,设直线 AB 方程:$y=kx+m$,联立方程得:$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\frac{2m^2-6}{1+2k^2}$,由直线 PA,PB 相互垂直得:

$(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，带入化简得 $4k^2+8km+3m^2-2m-1=0$

即：$(2k+m-1)(2k+3m+1)=0$；

当 $2k+m-1=0$ 时，直线 AB 过点 P(舍)；

当 $2k+3m+1=0$ 时，直线 AB 过定点 $Q\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，

综上所述，直线 AB 过定点 $Q\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，…………………………………………………………（8 分）

在 $Rt\Delta PAB$ 中，P 到 AB 距离的最大值为 $|PQ|$，而 $|PQ|^2=\left(2-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{32}{9}$

所以，点 P 到直线 AB 的距离最大值为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. …………………………………………………（12 分）

22. 解：(1) 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=-\frac{1}{x}+ax+1=\frac{ax^2+x-1}{x}(x>0)$

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{x-1}{x}$，由 $f'(x)>0$ 得 $x>1$

$\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，在单调递减；

当 $a>0$ 时，有 $\Delta>0$，且 $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}<0<\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}$，$f'(x)=\frac{ax^2+x-1}{x}$.

由 $f'(x)>0$，即 $ax^2+x-1>0(x>0)$ 得 $x>\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$ 单调递减；…………………（1 分）

当 $a<0$ 时：$\Delta=1+4a$

若 $-\frac{1}{4}<a<0$ 时，有 $\Delta>0$，且 $0<\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}<\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}$，$f'(x)=\frac{ax^2+x-1}{x}$，

由 $f'(x)>0$，即 $ax^2+x-1>0(x>0)$ 得

$\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}$ ………………………………………………………………（2 分）

$\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a},\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$ 单调递增，在 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$，$\left(\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty\right)$ 单调递减；

若 $a\leqslant-\frac{1}{4}$ 时，有 $\Delta\leqslant0$，$ax^2+x-1\leqslant0$ 恒成立，$f'(x)\leqslant0$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；……………………………………………………………………（3 分）

综上：当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，在 $(0,1)$ 单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$ 单调递减；

当 $-\frac{1}{4}<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a},\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$ 单调递增，

在 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$，$\left(\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty\right)$ 单调递减；

若 $a\leqslant -\frac{1}{4}$ $f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减. ……………………………………………………………… (4 分)

(2) $f(x)=-\ln x+\frac{1}{2}ax^2+x(x>0)$

$f'(x)=-\frac{1}{x}+ax+1.\ f''(x)=\frac{1}{x^2}+a$

①在 $a\geqslant 0$ 时. $f''(x)>0$ 恒成立

在$(x_0,f(x_0))$处的切线：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

即 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=g(x)$

$\because f''(x)>0$ 恒成立. 则 $f'(x)$在 $x>0$ 上为增函数

记 $F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$

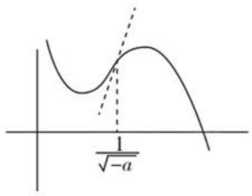
在 $x>x_0$ 时 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)>0$

$F(x)>F(x_0)=0$

在 $x<x_0$ 时 $F'(x)=f'(x)-f'(x)<0$

$F(x)>F(x_0)=0$ 因此 $a\geqslant 0$ 不符合题意. ……………………………………………………… (7 分)

②在 $a<0$ 时，$f''(x)=\frac{1}{x^2}-(-a)=\left(\frac{1}{x}-\sqrt{-a}\right)\left(\frac{1}{x}+\sqrt{-a}\right)=0$



可知在$\frac{1}{x_0}=\sqrt{-a}$时，取$\sqrt{\frac{1}{-a}}$有 $f''(x_0)=0$

且在 $x>\frac{1}{\sqrt{-a}}$时 $x>x_0$ 时，$f''(x)<0$，且 $f'(x)$递减.

在 $x<\frac{1}{\sqrt{-a}}$时即 $x<x_0$ 时，$f''(x)>0$，且 $f'(x)$递增

过$(x_0,f(x_0))$处切线：$f-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

切线 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=g(x)$

令 $F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)-f(x_0)(x-x_0)$

则 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$，在 $x>x_0$ 时，$f'(x)$为减函数，$f'(x)<f'(x_0)$

$\therefore F'(x)<0$，$\therefore F(x)<F(x_0)=0$，即 $f(x)<g(x)$

在 $x<x_0$ 时，$f'(x)$增函数，$F'(x)<0$，$\therefore F(x)>F(x_0)=0$，即 $f(x)>g(x)$

$\therefore$存在 $x_0=\frac{1}{\sqrt{-a}}$，解得$\forall x>0$，$(x-x_0)[f(x)-g(x)]>0$ 恒成立. $\therefore a<0$ 可取. ……… (11 分)

综合①②讨论可知：$a<0$. ……………………………………………………………………… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。