2023~2024学年第一学期期中调研考试

高三数学试题

注意事项：

1．考试时间120分钟，试卷满分150分.

2．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

3．请用2B铅笔和0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上指定区域内作答.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设m为实数，$A=\{m-1,-3\}$，$B=\{2m-1,m-3\}$.若$A\cap B=\{-3\}$，则$m=$

A．1　　B．-1　　C．0　　D．0或-1

【答案】B

【解析】$A\cap B=\{-3\}$，则$2m-1=-3$或$m-3=-3$，$\therefore m=-1$或0.

$m=-1$时，$A=\{-2,-3\}$，$B=\{-3,-4\}$，$A\cap B=\{-3\}$，满足.

$m=0$时，$A=\{-1,-3\}$，$B=\{-1,-3\}$，$A\cap B=\{-1,-3\}$，不满足，选B.

2．“$a^2<1$”是“$a<2$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】“$a^2<1$”，则$-1<a<1$，则一定有$a<2$，充分.

$a<2$时，不一定有$a^2<1$，不必要，选A.

3．设$z_1=2+3\mathrm{i}$，$z_2=m-\mathrm{i}(m\in\mathbf{R})$，若$\dfrac{z_1}{z_2}<0$，则$m=$

【答案】A

【解析】$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+3i}{m-i}=\frac{(2+3i)(m+i)}{m^2+1}=\frac{2m+(2m+3m)i-3}{m^2+1}$

$=\frac{2m-3+(2+3m)i}{m^2+1}<0$，$\therefore 2+3m=0$，$\therefore m=-\frac{2}{3}$，选 A.

4．连云港海滨浴场是我省最优质的天然海滨浴场，浪缓滩平，水清沙细，当阳光射入海水后，海水中的光照强度随着深度增加而减弱，可用 $I_D=I_0e^{-KD}$ 表示其总衰减规律，其中 K 是平均消光系数，D（单位：米）是海水深度，I_D（单位：坎德拉）和 I_0（单位：坎德拉）分别表示在深度 D 处和海面的光强.已知某海区 5 米深处的光强是海面光强的 40%，则该海区消光系数 K 的值约为（参考数据：$\ln 2\approx 0.7$，$\ln 5\approx 1.6$）

A．0.2　　B．0.18　　C．0.16　　D．0.14

【答案】B

【解析】$40\%I_0=I_0e^{-5K}$，$\therefore e^{-5K}=\frac{2}{5}$，$\therefore -5K=\ln\frac{2}{5}$

$\therefore K=\frac{\ln\frac{2}{5}}{-5}=\frac{0.7-1.6}{-5}=0.18$，选 B.

5．已知 $2\cos(2\alpha+\beta)-3\cos\beta=0$，则 $\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)=$

A．5　　B．$\frac{1}{5}$　　C．-5　　D．$-\frac{1}{5}$

【答案】D

【解析】$2\cos(2\alpha+\beta)=3\cos\beta$，则 $2\cos(\alpha+\beta+\alpha)=3\cos(\alpha+\beta-\alpha)$

$2\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=3\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+3\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$-5\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$，$-5\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha=1$

$\therefore\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha=-\frac{1}{5}$，选 D.

6．若$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$　$b=\log_3 2$，$c=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则

A．$b<c<a$　　B．$a<b<c$　　C．$a<c<b$　　D．$c<a<b$

【答案】C

【解析】$a=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$，$b=\log_3 2>\frac{1}{2}$，$c=\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{1}{2}$，$\therefore a$最小.

$\frac{1}{2}<b=\log_3 2<\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}<c=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{3}{4}$，$b=\log_3 2>\frac{5}{8}$，$c<\frac{5}{8}$，$\therefore a<c<b$，选C.

7．设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$都是单位向量，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60^\circ$，则$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$的最大值为

A．$\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{3}{2}-\sqrt{3}$　　D．$\frac{3}{2}+\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】设$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\vec{c}=(x,y)$，$x^2+y^2=1$.

$$(\vec{c}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{b})=(x-1,y)\left(x-\frac{1}{2},y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)+y\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}+y^2-\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

$$=\frac{3}{2}-\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\le\frac{3}{2}+\sqrt{3}$$，选D.

8．若函数$f(x)=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一的极值点，则正数$\omega$的取值范围是

A．$\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3}\right)$　　B．$\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3}\right]\cup\left[5,\frac{17}{3}\right]$

C．$\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3}\right)\cup\left(5,\frac{17}{3}\right)$　　D．$\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3}\right]\cup\left[5,\frac{17}{3}\right)$

【答案】B

【解析】$f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$，$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$，则$\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}<\omega x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}$

$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一的极值点，则$\begin{cases}\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}\le\frac{3}{2}\pi\end{cases}$，$\therefore\frac{5}{3}<\omega\le\frac{11}{3}$

或$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}<\frac{3}{2}\pi\\ \frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}\le\frac{5}{2}\pi\end{cases}$ $\therefore 5\le\omega\le\frac{17}{3}$，选B.

$k\ge1$时，$\begin{cases}\frac{\pi}{2}+k\pi\le\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{6}<\frac{3}{2}\pi+k\pi\\ \frac{3}{2}\pi+k\pi<\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}\le\frac{5}{2}\pi+k\pi\end{cases}$，无解.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，$a_5=8$，则

A．$\{a_na_{n+1}\}$的公比为4　　　　B．$\{\log_2 a_n\}$的前20项和为170

C．$\{a_n\}$的前10项积为2^{35}　　　　D．$\{a_n+a_{n+1}\}$的前n项和为$\frac{3}{2}(2^{n-1}-1)$

【答案】ABC

【解析】$q^3=8$，$\therefore q=2$，$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}=2^{n-2}$，$\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=q^2=4$，A对.

$\log_2 a_n=n-2$，$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_{20}=-1+0+\cdots+18=170$，B对.

$a_1a_2\cdots a_{10}=2^{-1+0+\cdots+8}=2^{35}$，C对.$\{a_n+a_{n+1}\}$的前$n$项和$\frac{3}{2}(2^n-1)$，D错，

选ABC.

10．已知直线$l:mx-y+1-m=0(m\in\mathbf{R})$，则

A．直线l过定点$(1,1)$

B．直线l与圆$x^2+y^2=2$相切时，m的值是-1

C．原点到直线l的最大距离为2

D．直线l与圆$x^2+y^2-4x+2=0$相交

【答案】AB

【解析】$m(x-1)-y+1=0$过定点$P(1,1)$，A对.

直线l与圆$x^2+y^2=2$相切时，$\dfrac{|1-m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$，$\therefore m=-1$，B对.

$OP=\sqrt{2}$，$\therefore$原点到l的最大距离为$\sqrt{2}$，C错.

圆$x^2+y^2-4x+2=0$，化简$(x-2)^2+y^2=2$，圆心$(2,0)$，$r=\sqrt{2}$，

$P(1,1)$在圆上，直线l与圆可能相切，D错，选AB.

11．定义在$(-1,1)$的函数$f(x)$满足$f(m)-f(n)=f\left(\dfrac{m-n}{1-mn}\right)$，且当$-1<x<0$时，$f(x)<0$，则

A．$f(x)$是奇函数

B．$f(x)$在$(-1,1)$上单调递减

C．$f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{1}{5}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

D．$f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

【答案】AC

【解析】$n=0$时，$f(m)-f(0)=f(m)$，$\therefore f(0)=0$，$f(m)=f(n)+f\left(\dfrac{m-n}{1-mn}\right)$，

$m=0$，$f(0)=f(n)+f(-n)$，$\therefore f(x)$为奇函数，A对.

$n=\dfrac{1}{3}$，$m=\dfrac{1}{2}$时，$\dfrac{m-n}{1-mn}=\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{6}}=\dfrac{1}{5}$，$\therefore f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{1}{5}\right)$，C对.

$-1<x<0$时，$f(x)<0$，而$f(0)=0$，$\therefore f(x)$不可能单调减，B错.

令$-1<x_1<x_2<1$，则$f(x_1)-f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)$，$\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$，

$\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}+1=\dfrac{(1+x_1)(1+x_2)}{1-x_1x_2}>0$，$\therefore -1<\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$，$f\left(\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)<($

则 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 $(-1,1)\nearrow$，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)$，D 错，选 AC.

12．在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=2$. H,H_1,E 分别为 AC,A_1C_1,BB_1 的中点，点 M 在直线 HH_1 上，且 $\overrightarrow{HM}=\lambda\overrightarrow{HH_1}$，$\lambda\in\mathbf{R}$. 下列说法正确的有

A．当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，B_1M 与 C_1E 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

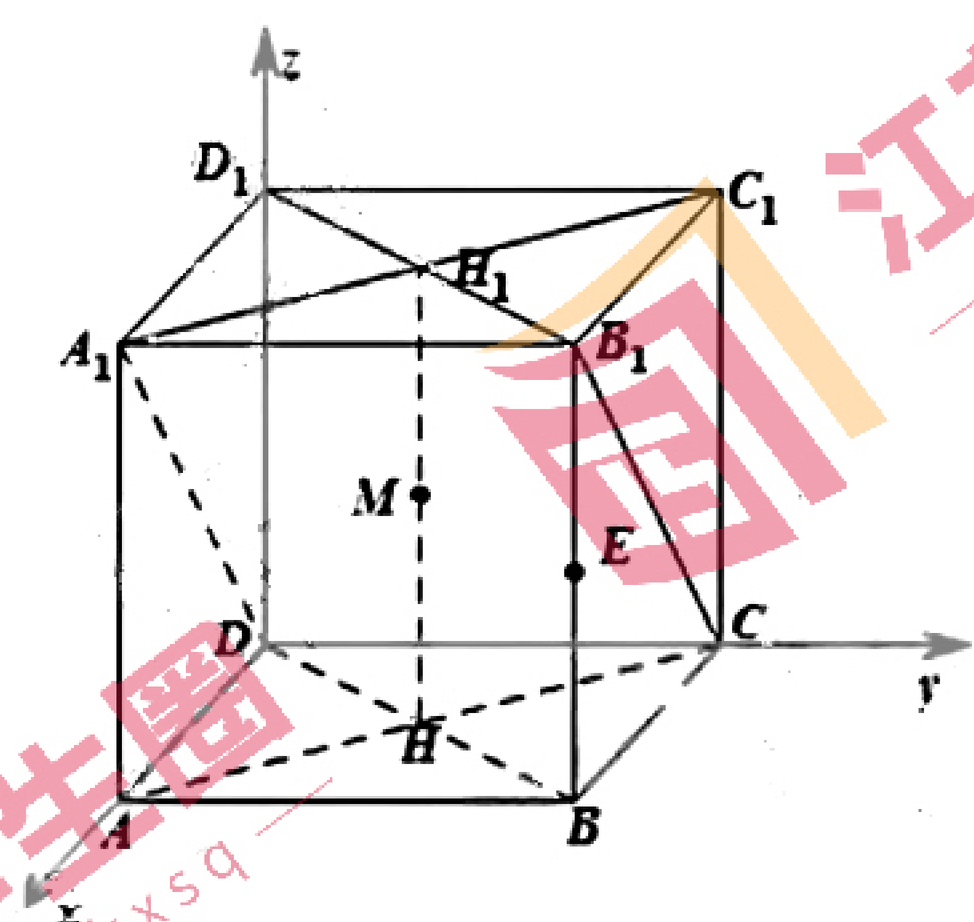
B．当 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时，点 M 到平面 A_1C_1E 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时，$B_1M\perp$ 平面 A_1C_1E

D．若平面 ABM 与平面 A_1B_1C 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$，则 $\lambda=2$

【答案】BC

【解析】如图建系，$B_1(1,1,2)$，$C_1(0,1,2)$，$E(1,1,1)$.



对于 A，$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{MB_1}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{EC_1}=(-1,0,1)$，

$\cos\langle MB_1,EC_1\rangle=\left|\cos\langle\overrightarrow{MB_1},\overrightarrow{EC_1}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{MB_1}\cdot\overrightarrow{EC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{MB_1}\right|\left|\overrightarrow{EC_1}\right|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，A 错.

对于 B，$S_{\triangle MA_1C_1}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times 2\times\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，$E$ 到面 MA_1C_1 的距离为 B 到面 ACC_1A_1 的距离

$d=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$V_{E-MA_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}$，$EA_1=EC_1=A_1C_1=\sqrt{2}$，$\therefore S_{\triangle EA_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

设 M 到平面 A_1C_1E 的距离 h，则 $\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}h$，$\therefore h=\frac{\sqrt{3}}{2}$，B 对.

对于 C，$\lambda=\frac{3}{4}$，$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{MB_1}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{EC_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$，

$\overrightarrow{MB_1}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0$，$\overrightarrow{MB_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0$，$\therefore MB_1\perp$ 面 A_1C_1E，C 对.

对于 D，$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\lambda\right)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，面 MAB 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MA}=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}y_1=0\\ \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1-2\lambda z_1=0\end{cases}$，不妨设 $z_1=1$，则 $x_1=4\lambda$，$y_1=0$

$\overrightarrow{n_1}=(4\lambda,0,1)$，而 A_1B_1C 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}y_2=0\\ -x_2+y_2-2z_2=0\end{cases}$，不妨设 $z_2=1$，则 $x_2=-2$，$y_2=0$，

$\overrightarrow{n_2}=(-2,0,1)$，$\frac{3}{\sqrt{13}}=\left|\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle\right|=\frac{|1-8\lambda|}{\sqrt{16\lambda^2+1}\cdot\sqrt{5}}$，$\lambda=-\frac{1}{7}$ 或 2，D 错，选 BC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知 $f(x)=3\sin x-4\tan x+1$，若 $f(a)=2$，则 $f(-a)=$________.

【答案】0

【解析】令 $g(x)=3\sin x-4\tan x$，$g(x)$ 为奇函数，$f(x)=g(x)+1$，

$f(a)=g(a)+1=2$，$\therefore g(a)=1$，则 $g(-a)=-1$，$f(-a)=g(-a)+1=-1+1=0$.

14．若直角三角形两条直角边的和为 10，则其斜边的最小值是________.

【答案】$5\sqrt{2}$

【解析】设两直角边为 a,b，则 $a+b=10$，斜边 $\sqrt{a^2+b^2}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)=5\sqrt{2}$

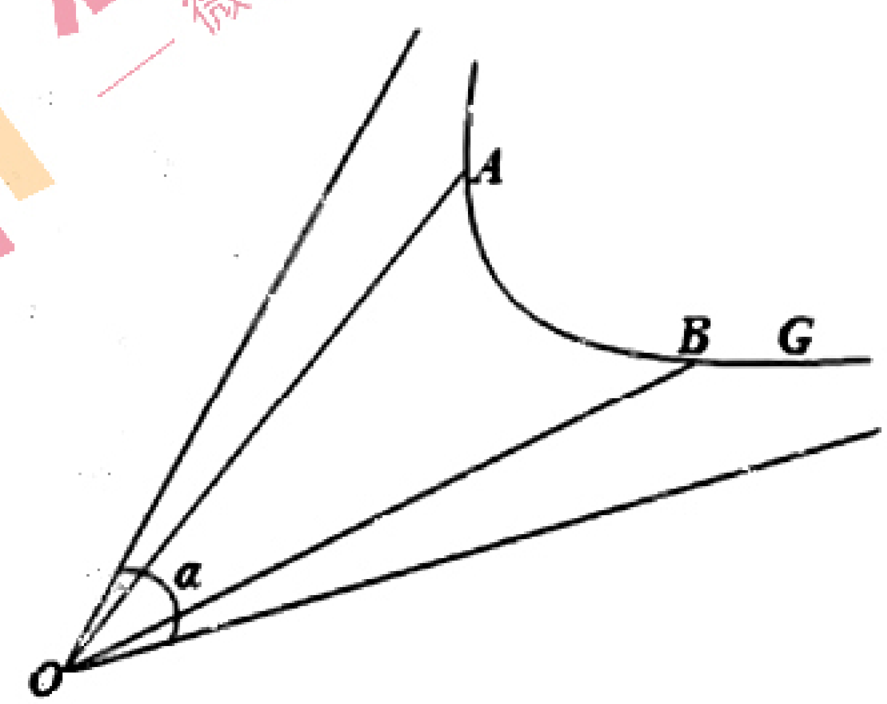
15．点F为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，直线$y=2b$与双曲线交于$B,C$两点，且$\angle BFC=90°$，则该双曲线的离心率为________.

【答案】$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

【解析】$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=2b\end{cases}$，则$\begin{cases}x=\pm\sqrt{5}a\\ y=2b\end{cases}$，$B(\sqrt{5}a,2b)$，$C(-\sqrt{5}a,2b)$

$\angle BFC=90°$，$\therefore \overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=0$，$\therefore(\sqrt{5}a-c,2b)(-\sqrt{5}a-c,2b)=0$，$\therefore\dfrac{c}{a}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

16．如图，对于曲线G所在平面内的点O，若存在以O为顶点的角α，使得对于曲线G上的任意两个不同的点A,B恒有$\angle AOB\le\alpha$成立，则称角α为曲线G的相对于点O的“界角”，并称其中最小的“界角”为曲线G的相对于点O的“确界角”.已知曲线$C:y=\begin{cases}xe^{x-1}+1,x>0,\\ \dfrac{1}{16}x^2+1,x\le 0\end{cases}$（其中e是自然对数的底数），点$O$为坐标原点，曲线$C$的相对于点$O$的“确界角”为$\beta$，则$\sin\beta=$________



【答案】1

【解析】过原点作$y=xe^{x-1}+1$的切线，切点$A(x_1,x_1e^{x_1-1}+1)$，$y'=(x+1)e^{x-1}$，

$k_1=(x_1+1)e^{x_1-1}$，$y-(x_1e^{x_1-1}+1)=(x_1+1)e^{x_1-1}(x-x_1)$过$(0,0)$，

$\therefore -x_1e^{x_1-1}-1=(-x_1^2-x_1)e^{x_1-1}$，$\therefore x_1^2e^{x_1-1}-1=0$，$x_1=1$，$k_1=2$.

切点 $B\left(x_2,\frac{1}{16}x_2^2+1\right)$，$y'=\frac{1}{8}x$，$k_2=\frac{1}{8}x_2$，$y-\left(\frac{1}{16}x_2^2+1\right)=\frac{1}{8}x_2(x-x_2)$ 过 $(0,0)$，

$-\frac{1}{16}x_2^2-1=-\frac{1}{8}x_2^2$，$\therefore x_2=-4$，$k_2=-\frac{1}{2}$. $k_1k_2=-1$，$\therefore$ 两切线垂直，$\therefore \beta=\frac{\pi}{2}$，

$\sin\beta=1$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$\frac{1}{a_1}+\frac{3}{a_2}+\frac{5}{a_3}+\cdots+\frac{2n-1}{a_n}=n$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$S_n<\frac{1}{2}$.

【解析】

（1）$\because \frac{1}{a_1}+\frac{3}{a_2}+\frac{5}{a_3}+\cdots+\frac{2n-1}{a_n}=n$①

$n\geq 2$ 时，$\frac{1}{a_1}+\frac{3}{a_2}+\frac{5}{a_3}+\cdots+\frac{2n-3}{a_{n-1}}=n-1$②

①$-$②$\Rightarrow \frac{2n-1}{a_n}=1\Rightarrow a_n=2n-1(n\geq 2)$，而 $a_1=1$ 也满足上式，

$\therefore a_n=2n-1$.

（2）$b_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$\therefore S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$.

18．（12 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $A=\frac{\pi}{6}$，$(1+\sqrt{3})\sin B=2\sin C$.

（1）证明：$b=\sqrt{2}a$；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2+2\sqrt{3}$，求 b.

【解析】

（1）证明：$(1+2\cos A)\sin B=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B$

$\therefore \sin B=2\sin A\cos B\Rightarrow \tan B=1$，$B=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}=\sqrt{2}\Rightarrow b=\sqrt{2}a$.

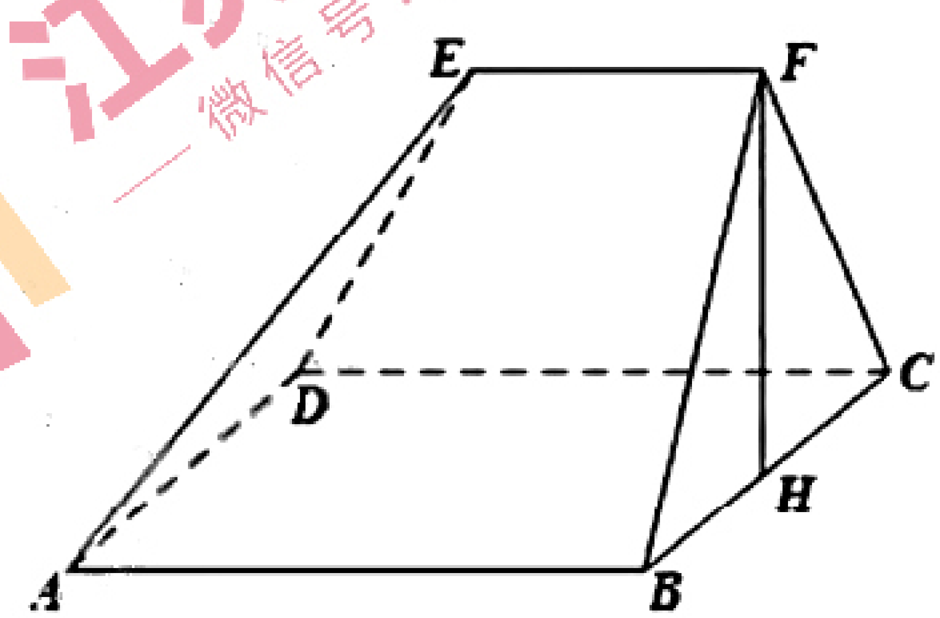
（2）$\sin C=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b}{\sqrt{2}}\cdot b\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=2+2\sqrt{3}\Rightarrow b=4$.

19.（12分）如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为3的正方形，平面 $ABFE$ 与平面 $CDEF$ 的交线为 EF.

（1）证明：$EF\parallel AB$；

（2）若平面 $FBC\perp$ 平面 $ABCD$，H 为 BC 的中点，$FH=2$，$FC=2.5$，$EF=1.5$，求该几何体的体积.



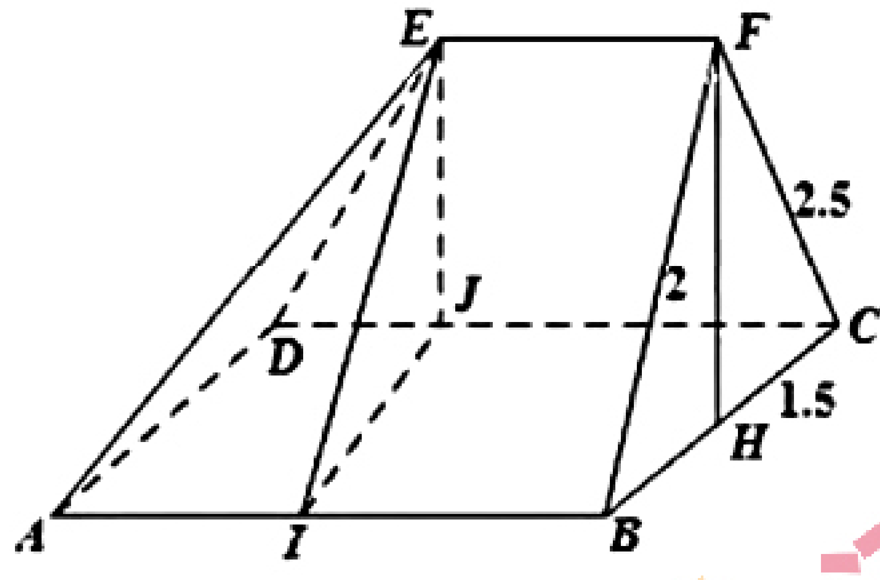
【解析】

（1）证明：$\because CD\parallel AB$，而 $CD\not\subset$ 平面 $ABFE$，$AB\subset$ 平面 $ABFE$，

$\therefore CD\parallel$ 平面 $ABFE$，又 $\because CD\subset$ 平面 $CDEF$，

平面 $CDEF\cap$ 平面 $ABFE=EF$，$\therefore CD\parallel EF$，$\therefore EF\parallel AB$.

（2）$\because FH=2$，$FC=2.5$，H 为 BC 中点，$\therefore CH=1.5$.



而 $FH^2+CH^2=CF^2$，$\therefore FH\perp BC$，$\because$平面 $FBC\perp$平面 $ABCD$.

平面 $FBC\cap$平面 $ABCD=BC$，$\therefore FH\perp$平面 $ABCD$.

过 E 分别作 $EI\ /\!/\ FB$ 交 AB 于点 I，$EJ\ /\!/\ FC$ 交 CD 于点 J，连接 IJ.

$\therefore V_{EF-ABCD}=V_{BCF-EIJ}+V_{E-AIJD}=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times1.5+\dfrac{1}{3}\times1.5\times3\times2=4.5+3=7.5$.

或 $V_{刍甍}=\dfrac{1}{6}\times(2\times3+1.5)\times3\times2=7.5$（秒杀）

20.（12分）某高中有50名学生参加数学竞赛，得分（满分：150分）如下：

	[90,100)	[100,110)	[110,120)	[120,130)	[130,140)	[140,150]
女生	1	4	5	5	3	2
男生	0	2	4	12	9	3

（1）若得分不低于120分的学生称为“数学优秀者”问：是否有95%的把握认为“数学优秀者”与性别有关；

（2）若在竞赛得分不低于130分的男生中随机抽取3人，求这3人中至少有1人得分在[140,150]内的概率.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	10.828

【解析】

（1）2×2 列联表如下：

数学是否优秀 \ 性别	数学优秀者	不优秀	合计
男	24	6	30
女	10	10	20
合计	34	16	50

$K^2=\dfrac{50\times(60-240)^2}{20\times30\times34\times16}\approx4.96>3.841$

$\therefore$有95%的把握认为“数学优秀者”与性别有关.

（2）得分不低于130分的男生有12人，其中得分在$[140,150]$内的有3人.

$\therefore$3人中至少有1人得分在$[140,150]$内的概率$P=1-\dfrac{C_9^3}{C_{12}^3}=\dfrac{34}{55}$.

21．（12分）已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-7}=1$经过点$M\left(-2,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

（1）求椭圆的标准方程；

（2）过点$N(0,6)$的直线l交该椭圆于C,D两点（点C在点D的上方），椭圆的上、下顶点分别为A,B，直线AD与直线BC交于点Q.证明：点Q在定直线上.

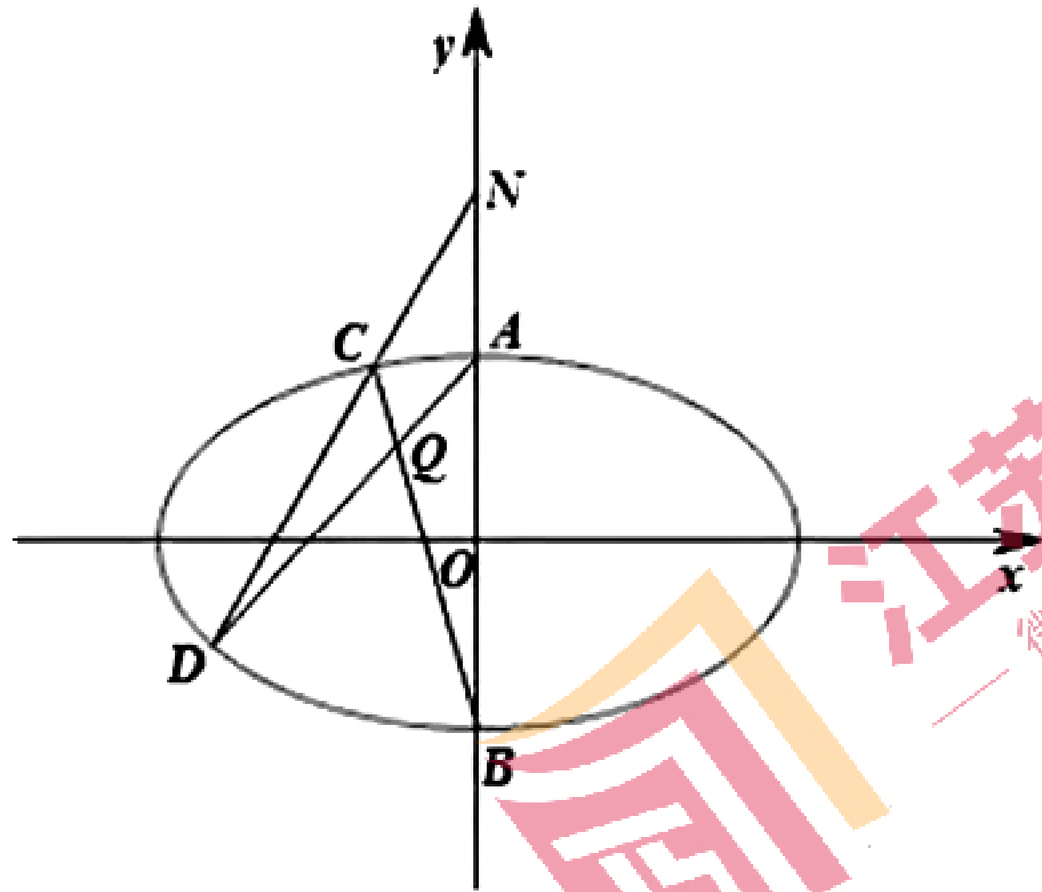
【解析】

（1）$\because$椭圆过点M，$\therefore\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{27}{4(a^2-7)}=1\Rightarrow(4a^2-7)(a^2-16)=0$

$\because a^2>7$，$\therefore a^2=16$，

$\therefore$椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

（2）方法一：设直线l的方程为$y=kx+6$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，$A(0,3)$，$B(0,-3)$



$$\begin{cases} y=kx+6 \\ 9x^2+16y^2=144 \end{cases} \Rightarrow (9+16k^2)x^2+192kx+432=0\text{，}\Delta>0$$

$\therefore$直线AD方程为：$y=\dfrac{y_2-3}{x_2}x+3$，直线BC方程：$y=\dfrac{y_1+3}{x_1}x-3$.

联立AD,BC方程$\Rightarrow \dfrac{y_Q-3}{y_Q+3}=\dfrac{(y_2-3)x_1}{x_2(y_1+3)}=\dfrac{(kx_2+3)x_1}{(kx_1+9)x_2}$

$$=\frac{kx_1x_2+3(x_1+x_2)-3x_2}{kx_1x_2+9x_2}=\frac{k\cdot\dfrac{432}{9+16k^2}-\dfrac{576k}{9+16k^2}-3x_2}{k\cdot\dfrac{432}{9+16k^2}+9x_2}$$

$$=\frac{\dfrac{-144k}{9+16k^2}-3x_2}{\dfrac{432k}{9+16k^2}+9x_2}=-\frac{1}{3}\text{，}\therefore y_Q=\frac{3}{2}.$$

$\therefore$点Q在定直线$y=\dfrac{3}{2}$上运动.

方法二：和差转化

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{192k}{9+16k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{432}{9+16k^2} \end{cases} \Rightarrow kx_1x_2=-\frac{9}{4}(x_1+x_2)$$

$$\therefore \frac{y_Q-3}{y_Q+3}=\frac{kx_1x_2+3x_1}{kx_1x_2+9x_2}=\frac{-\dfrac{9}{4}(x_1+x_2)+3x_1}{-\dfrac{9}{4}(x_1+x_2)+9x_2}=\frac{3x_1-9x_2}{27x_2-9x_1}=-\frac{1}{3}$$

$\therefore y_Q=\dfrac{3}{2}$.

方法三：点代平方差

$\because D$在椭圆上，$\therefore \dfrac{x_2^2}{16}+\dfrac{y_2^2}{9}=1$，$\therefore \dfrac{(y_2+3)(y_2-3)}{9}=-\dfrac{x_2^2}{16}\Rightarrow\dfrac{y_2-3}{x_2}=-\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{x_2}{y_2+3}$

$$\therefore \frac{y_Q-3}{y_Q+3}=\frac{x_1}{y_1+3}\cdot\frac{y_2-3}{x_2}=\frac{x_1}{y_1+3}\cdot\left(-\frac{9}{16}\right)\frac{x_2}{y_2+3}=-\frac{9}{16}\cdot\frac{x_1x_2}{(kx_1+9)(kx_2+9)}$$

$$=-\frac{9}{16}\cdot\frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+9k(x_1+x_2)+81}=-\frac{9}{16}\cdot\frac{\dfrac{432}{9+16k^2}}{k^2\cdot\dfrac{432}{9+16k^2}+9k\cdot\dfrac{-192k}{9+16k^2}+81}=-\frac{1}{3}$$

$\therefore y_Q=\dfrac{3}{2}$.

22.（12分）已知函数$f(x)=\left(\dfrac{1}{x-1}+a\right)\ln x$.

（1）若$f(x)>0$恒成立，求实数a的取值范围；

（2）若$f(x)$在区间$(1,+\infty)$上存在极值，求实数a的取值范围.

【解析】

（1）$\because f(x)=\left(\dfrac{1}{x-1}+a\right)\ln x>0$恒成立

而$0<x<1$时，$\ln x<0$，$\therefore \dfrac{1}{x-1}+a<0\Rightarrow a<\dfrac{1}{1-x}$，$\dfrac{1}{1-x}>1$，$\therefore a\le 1$.

$x>1$时，$\ln x>0$，$\therefore \dfrac{1}{x-1}+a>0\Rightarrow a>\dfrac{1}{1-x}$，$\dfrac{1}{1-x}<0$，$\therefore a\ge 0$，$\therefore 0\le a\le 1$，

即实数a的取值范围为$[0,1]$.

（2）$f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}\ln x+\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x-1}+a\right)=0$在$x\in(1,+\infty)$上有变号零点，

即$-\ln x+1-\dfrac{1}{x}+a\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)=0$在$x\in(1,+\infty)$上有变号零点.

令$g(x)=-\ln x+1-\frac{1}{x}+a\left(x+\frac{1}{x}-2\right)$，$g(1)=0$

$$g'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+a\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x-1}{x^2}[-1+a(x+1)].$$

①当$a\le 0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上↙，$g(x)<g(1)=0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上无零点，舍去.

②当$a\ge\frac{1}{2}$时，$g'(x)>0,g(x)$在$(1,+\infty)$上↗，$g(x)>g(1)=0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上无零点，也舍.

③当$0<a<\frac{1}{2}$时，令$g'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{a}-1$，

且$g(x)$在$\left(1,\frac{1}{a}-1\right)$上↙；$\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$上↗，此时$g\left(\frac{1}{a}-1\right)<g(1)=0$

$$g\left(\frac{2}{a}+2\right)^2>-\left(\frac{2}{a}+2\right)-\left(\frac{2}{a}+2\right)+a\left[\left(\frac{2}{a}+2\right)^2-2\left(\frac{1}{a}+2\right)\right]=0$$

$\therefore g(x)$在$\left(\frac{1}{a}-1,\left(\frac{2}{a}+2\right)^2\right)$上有唯一的变号零点，符合.

综上：实数a的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$