高三数学

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知复数 z 满足 $z(3+4\mathrm{i})=|2\sqrt{6}-\mathrm{i}|$,则 $\overline{z}=$

A.$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$　　B.$\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$　　C.$\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$　　D.$\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$

2.集合 $A=\left\{n\in\mathbf{Z}|\frac{2}{n-1}\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\mathbf{N}$,则 $A\cap B=$

A.$\{-1,0,2,3\}$　　B.$\{0,2,3\}$　　C.$\{1,2,3\}$　　D.$\{2,3\}$

3.在数列 $\{a_n\}$ 中,$p:a_{n+1}=2a_n$;$q:\{a_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列,则 p 是 q 的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

4.已知 a,b,c 为实数,则

A.若 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$,则 $a>b$　　B.若 $ac^2\quad bc^2$,则 $a>b$

C.若 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$,则 $ac<bc$　D.若 $a<b$,则 $a^2<b^2$

5.由于我国与以美国为首的西方国家在科技领域内的竞争日益激烈,美国加大了对我国一些高科技公司的打压,为突破西方的技术封锁和打压,我国的一些科技企业积极实施了独立自主、自力更生的策略,在一些领域取得了骄人的成绩.我国某科技公司为突破“芯片卡脖子”问题,实现芯片制造的国产化,加大了对相关产业的研发投人.若该公司 2020 年全年投人芯片制造方面的研发资金为 120 亿元,在此基础上,计划以后每年投人的研发资金比上一年增长 9%,则该公司全年投人芯片制造方面的研发资金开始超过 200 亿元的年份是

参考数据:$\lg 1.09\approx 0.0374,\lg 2\approx 0.3010,\lg 3\approx 0.4771$.

A.2024 年　　B.2025 年　　C.2026 年　　D.2027 年

6.已知 α,β 是两个不同的平面,a,b 是两条不同的直线,则

A.若 $a\subset\alpha,b\subset\beta$ 且 $a//b$,则 $\alpha//\beta$

B.若 $a\subset\alpha,b\subset\alpha$ 且 $a//\beta,b//\beta$,则 $\alpha//\beta$

C.若 $\alpha\perp\beta$ 且 $\alpha\cap\beta=a,a\perp b$,则 $b\perp\alpha$

D.若 $a\subset\alpha,b\subset\beta,a//\beta,b//\alpha$ 且 a,b 异面,则 $\alpha//\beta$

7.已知函数 $f(x)=\sin(\omega x-\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$,$\forall x\in\mathbf{R}$,总有 $f\left(x_1\right)\ \ f(x)\ \ f\left(x_2\right)$ 成立,且 $\left|x_1-x_2\right|$ 的最小值为 π.若 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\cos\varphi$,则 $f(x)$ 的图象的一条对称轴方程是

A. $x=-\frac{\pi}{3}$　　　B. $x=-\frac{\pi}{6}$　　　C. $x=\frac{\pi}{3}$　　　D. $x=\frac{\pi}{6}$

8.在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,a_1,a_2,a_5 成公比不为 1 的等比数列,S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,将数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{S_n-1\}$ 的公共项从小到大排列得到新数列 $\{b_n\}$,则 $\sum_{n=1}^{101}\frac{1}{b_n}=$

A.1　　　B. $\frac{1010}{1011}$　　　C. $\frac{1011}{2023}$　　　D. $\frac{1}{2023}$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9.在等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1>1,a_{2023}a_{2024}>0,\frac{a_{2024}-1}{a_{2023}-1}<0$,若 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,Π_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项积,则

A. $\{a_n\}$ 为单调递增数列

B. $S_{2023}<S_{2024}$

C. Π_{2023} 为 $\{\Pi_n\}$ 的最大项

D. $\{\Pi_n\}$ 无最大项

10.下列命题正确的是

A.若 α,β 均为第一象限角且 $\alpha>\beta$,则 $\tan\alpha>\tan\beta$

B.若 α 为第一象限角,则 $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos2\alpha}}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos2\alpha}}=\sqrt{2}$

C.在 $\triangle ABC$ 中,若 $\tan A\cdot\tan B>1$,则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形

D.若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则 $\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$

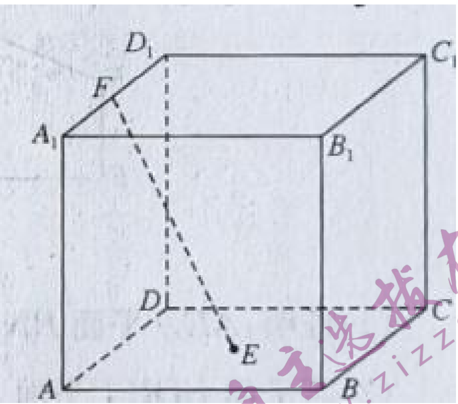
11.如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E,F 满足 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1F}=z\overrightarrow{A_1D_1}$,且 $x,y,z\in(0,1)$.记 EF 与 AA_1 所成角为 α,EF 与平面 $ABCD$ 所成角为 β,则

A.若 $x=\frac{1}{2}$,三棱雉 $E-BCF$ 的体积为定值

B.若 $z=\frac{1}{2}$,存在 $x=y$,使得 $EF//$ 平面 BDD_1B_1

C. $\forall x,y,z\in(0,1),\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

D.若 $x=y=z=\frac{1}{2}$,则在侧面 BCC_1B_1 内必存在一点 P,使得 $PE\perp PF$



12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 是奇函数, $g(x)=(x-1)f(x)$, $f'(x),g'(x)$ 分别是函数 $f(x),g(x)$ 的导函数, $g(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减,则

A. $f'(1+x)=f'(1-x)$

B. $g'(1+x)=g'(1-x)$

C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

D. $g\left(\mathrm{e}^{0.1}\right)>g(1-\ln 1.1)>0$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 **5** 分,共 20 分。

13.已知平面向量 $\mathbf{a}=(1,m),\mathbf{b}=(-2,1),\mathbf{c}=(n,2)$,若 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b},\mathbf{b}//\mathbf{c}$,则 $m+n=$

14.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,若 $\{a_n\}$ 与 $\{\sqrt{S_n}\}$ 均为等差数列,称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P.如 $a_n=0$ 时,其和 $S_n=0$,或 $a_n=2n-1$ 时,其和 $S_n=n^2$, $\{a_n\}$ 均是具有性质 P 的数列.请再写出一个除例子之外具有性质 P 的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$

15.设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数,若 $\forall x\in\mathbf{R}, f\left(f(x)-2^x\right)=11$,则不等式 $f(x)<7$ 的解集为

16.印章是我国传统文化之一,根据遗物和历史记载,至少在春秋战国时期就已出现,其形状多为长方体、圆柱

体等,陕西历史博物馆收藏的“独孤信多面体煤精组印”是一枚形状奇特的印章(如图 1),该形状称为“半正多面体”(由两种或两种以上的正多边形所围成的多面体),每个正方形面上均刻有不同的印章(图中为多面体的面上的部分印章).图 2 是一个由 18 个正方形和 8 个正三角形围成的“半正多面体”(其各顶点均在一个正方体的面上),若该多面体的棱长均为 1,且各个顶点均在同一球面上,则该球的表面积为


图 1

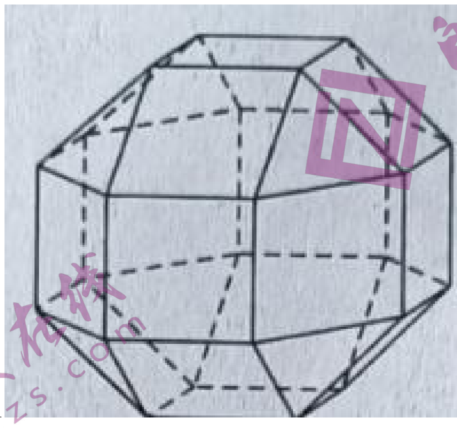


图 2

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

如图 1,山形图是两个全等的直角梯形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 的组合图,将直角梯形 $ABEF$ 沿底边 AB 翻折,得到图 2 所示的几何体.已知 $AB // CD // EF, AB = 2CD = 2EF, AB \perp BE$,点 N 在线段 CE 上,且 $EN = 2CN$.

在几何体 $BCE - ADF$ 中,解决下面问题.

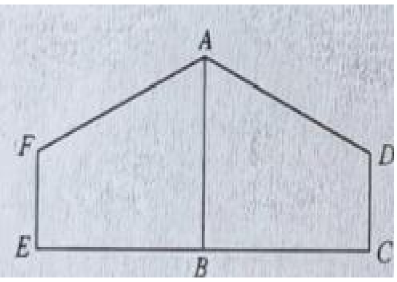


图 1

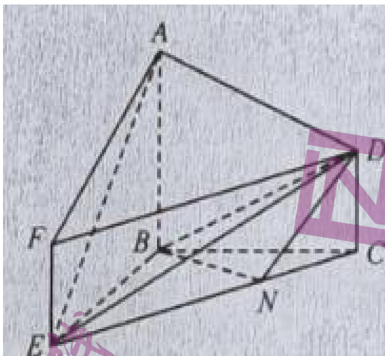


图 2

(1)证明: $AE //$ 平面 BND;

(2)若平面 $BDE \perp$ 平面 $ABCD$,证明: $BE \perp AD$.

18.(本小题满分 12 分)

已知 S_n 是正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,满足 $(S_{n+1} - S_{n-1})(S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}) = 2(n \quad 2), a_1 = 1, a_2 = \sqrt{3}$.

(1)若 $\log_{a_2} a_3 \times \log_{a_3} a_4 \times \log_{a_4} a_5 \times \cdots \times \log_{a_m} a_{m+1} = 6$,求正整数 m 的值;

(2)若 $b_n = 3^{n-1}$,在 b_k 与 $b_{k+1}\left(k \in \mathbf{N}^*\right)$ 之间插入 $\{a_n^2\}$ 中从 a_k^2 开始的连续 k 项构成新数列 $\{c_n\}$,即 $\{c_n\}$ 为

$b_1,a_1^2,b_2,a_2^2,a_3^2,b_3,\cdots$,求$\{c_n\}$的前 30 项的和.

19.(本小题满分 12 分)

在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,$\triangle ABC$的面积为S,已知$\dfrac{4S}{\tan B}=a^2\cos B+ab\cos A$.

(1)求角B;

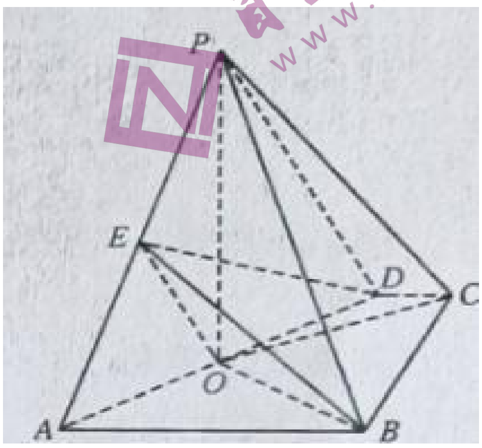
(2)若$b=3$,$\triangle ABC$的周长为l,求$\dfrac{S}{l}$的最大值.

20.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥$P-ABCD$中,四边形$ABCD$为梯形,$AB//CD,AB\perp BC,AB=3CD=6,BC=8$,$\triangle PAD$为等边三角形,且平面$PAD\perp$平面$ABCD$,$O,E$分别为$AD,PA$的中点.

(1)证明:平面$POB\perp$平面POC;

(2)求平面DOE与平面BOE夹角的余弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=\dfrac{1}{2},a_n+a_{n+1}=3\times 5^{n-1}$.

(1)判断$\left\{a_n-\dfrac{5^{n-1}}{2}\right\}$是否为等比数列?并求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$b_n=\begin{cases}2, n\text{ 为奇数}, \\ 4n-2, n\text{ 为偶数},\end{cases}$求数列$\{a_nb_n\}$的前$n$项和$S_n$.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=(a-1)e^x-be^{-x}-ax(a,b\in \mathbf{R})$.

(1)当$a=3,b=0$时,求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程;

(2)当$b=1$时,$f(x)$既存在极大值,又存在极小值,求a的取值范围;

(3)当$1<a<2,b=1$时,x_1,x_2分别为$f(x)$的极大值点和极小值点,且$f\left(x_1\right)+kf\left(x_2\right)>0$,求实数$k$的取值范围.