

中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 11 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x^2 - 5x \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x-1| \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2, 3\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$
- 若复数 $3-i$ 为方程 $ax^2 + bx + 1 = 0 (a, b \in \mathbf{R})$ 的一个根, 则该方程的另一个复数根是
 A. $3+i$ B. $-3-i$ C. $-i+3$ D. $-3+i$
- 在 $(3-\sqrt{x})^7$ 的展开式中, x^3 的系数为
 A. -21 B. 21 C. 189 D. -189
- 上、下底面均为等边三角形的三棱台的所有顶点都在同一球面上, 若三棱台的高为 3, 上、下底面边长分别为 $\sqrt{15}, 2\sqrt{6}$, 则该球的表面积为
 A. 32π B. 36π C. 40π D. 42π
- 若 $\frac{9\pi}{16} < \alpha < \frac{17\pi}{16}$, 且满足 $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{4}$, 则 $\sin\left(\frac{9\pi}{16} - \alpha\right) =$
 A. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C. $-\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$
- 已知点 A 为抛物线 $C: x^2 = 8y$ 上的动点, 点 B 为圆 $(x-6)^2 + (y+6)^2 = 9$ 上的动点, 设点 A 到 x 轴的距离为 d , 则 $|AB| + d$ 的最小值为
 A. 4 B. 5 C. 7 D. 10
- 已知函数 $f(x) = e^{a-x} + \frac{x^2}{2} + 4x - \ln(x+4) + e^{x-a+2\ln\frac{15}{4}}$ 存在零点, 则实数 a 的值为
 A. -2 B. $\ln\frac{15}{4} - 2$ C. -3 D. $\ln\frac{15}{4} - 3$
- 设 $a = \frac{17}{18}$, $b = \cos\frac{1}{3}$, $c = 3\sin\frac{1}{3}$, 则下列正确的是

- A. $b > a > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，部分选对但不全得 2 分，有错选的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + k$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象中相邻两条对称轴的距离是 $\frac{\pi}{2}$ ，将 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 是偶函数，且最大值为 4，则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期是 2π B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称
C. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{8}, -1)$ 对称 D. $f(x)$ 在 $[\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}]$ 上单调递减

10. 已知平面向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4$ ，且对任意的实数 t ，都有 $|\vec{b} + t\vec{a}| \geq |\vec{b} - \vec{a}|$ 恒成立，则下列结论正确的是

- A. $4\vec{a} - \vec{b}$ 与 \vec{b} 垂直 B. $(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 27$
C. $|\lambda\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}| + |\lambda\vec{a} - \vec{b}|$ 的最小值为 $\sqrt{21}$ D. $|\lambda\vec{a} - \vec{b}| - |\lambda\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$

11. 设 A, B 是一个随机试验中的两个事件，且 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{11}{24}, P(\overline{AB} + \overline{A}\overline{B}) = \frac{7}{24}$ ，则下列结论中正确的是

- A. $P(\overline{AB}) = \frac{1}{8}$ B. $P(\overline{A} + B) = \frac{5}{6}$
C. $P(A|B) = \frac{9}{11}$ D. $P(\overline{A}|B) = P(\overline{B}|A)$

12. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，满足 $S_{2022} < S_{2023} < S_{2021}$ ，设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$ ，数列 $\left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，则下列结论中正确的是

- A. $a_{2022} < 0$ B. 使得 $S_n < 0$ 成立的最大的 n 值为 4045
C. $a_{2023} \cdot a_{2024} < a_{2021} \cdot a_{2022}$ D. 当 $n = 2022$ 时， T_n 取得最小值

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

第 2 页 共 4 页

13. 求值： $\lg\left(\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}\right)=$ _____.

14. 已知 $a > 0, b > 0$ ，且满足 $a + 2b = 3$ ，则 $\frac{a^2 + 4}{2a} + \frac{2b^2 + b + 2}{2b + 1}$ 的最小值为_____.

15. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第一、二象限的交点分别为 P, Q ，若 $|PQ| = 4b$ ，则双曲线的离心率为_____.

16. 一条沿江公路上有 18 盏路灯，为节约用电，现打算关掉其中 4 盏路灯，为安全起见，要求公路的头尾两盏路灯不可关闭，关掉的相邻两个路灯之间至少有 3 盏亮着的路灯，则不同的方案总数共有_____种.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\frac{2c \sin B}{b} = \frac{\sin C}{\cos B}$ 。

(1) 若 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，求 $\tan C$ 的值；

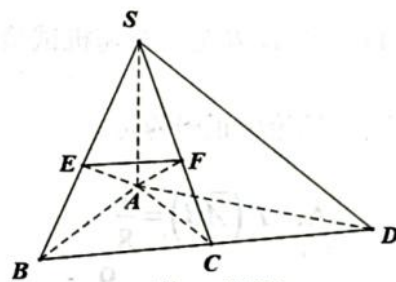
(2) 若 $a+c=3+3\sqrt{3}$ ， $\triangle ABC$ 内切圆的面积为 π ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

18. (12 分) 三棱锥 $S-ABD$ 中， $SA \perp$ 平面 ABD ， $AB=AC$ ， $S_{\triangle SBD} = \sqrt{2}S_{\triangle SBC}$ ，并且 $\angle BAC$ 是直角。

(1) 求二面角 $C-SA-D$ 所成角的余弦值；

(2) 若 $\angle SCB = 60^\circ$ ， SB, SC 上各取一点 E, F ，设 $\frac{SE}{SB} =$

$\frac{SF}{SC} = \lambda (0 < \lambda < 1)$ 。当 λ 为何值时，平面 $AEF \perp$ 平面 SBC 。



(第 18 题图)

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 5$ ，且 $2a_{n+1} = a_n + 2$ ， S_n 为其前 n 项的和。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求满足不等式 $|S_n - 2n - 6| < \frac{1}{2023}$ 的最小正整数 n 的值；

(3) 设 $b_m = (m-3)^2 + \lambda^2$ ， $C_n = n\lambda \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{a_n - 2}{3}\right)$ ，其中 $\lambda > 0$ ，若对任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$ ，总有

$b_m - C_n > \frac{7}{3}$ 成立，求 λ 的取值范围。



20. (12分) 新冠疫情下, 为了应对新冠病毒极强的传染性, 每个人出门做好口罩防护工作刻不容缓. 某口罩加工厂加工口罩由 A,B,C 三道工序组成, 每道工序之间相互独立, 且每道工序加工质量分为高和低两种层次级别, A,B,C 三道工序加工的质量层次决定口罩的过滤等级; A,B,C 工序加工质量层次均为高时, 口罩过滤等级为 100 等级 (表示最低过滤效率为 99.97%); C 工序的加工质量层次为高, A,B 工序至少有一个质量层次为低时, 口罩过滤等级为 99 等级 (表示最低过滤效率为 99%); 其余均为 95 级 (表示最低过滤效率为 95%).

表①: 表示 A,B,C 三道工序加工质量层次为高的概率; 表②: 表示加工一个口罩的利润.

工序	A	B	C
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

口罩等级	100 等级	99 等级	95 等级
利润/元	2.3	0.8	0.5

(1) X 表示一个口罩的利润, 求 X 的分布列和数学期望;

(2) 由于工厂中 A 工序加工质量层次为高的概率较低, 工厂计划通过增加检测环节对 A 工序进行升级. 在升级过程中, 每个口罩检测成本增加了 $a(0 \leq a \leq 0.4)$ 元时, 相应的 A 工序加工层次为高的概率在原来的基础上增加了 b ; 试问: 若工厂升级方案后对一个口罩利润的期望有所提高, 则 a 与 b 应该满足怎样的关系?

21. (12分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F_1 , 右焦点为 F_2 , 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

过点 F_2 作不与坐标轴垂直的直线交椭圆于 A, B 两点, 且 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设点 A 关于 x 轴的对称点为 C , 求 $\triangle F_1BC$ 的面积的最大值.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = (x^2 - x) \ln(|x| - 1)$.

(1) 当函数 $y = f(x) - ax$ 有 3 个零点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 a 取条件 (1) 下的取值时, 设函数 $y = f(x) - a$ 有 3 个零点 x_1, x_2, x_3 , 证明:

$$x_1 + x_2 + x_3 > \frac{2}{e}.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

