

2023~2024 学年度第一学期期中学业水平诊断

高三数学

注意事项:

1. 本试题满分 150 分, 考试时间为 120 分钟。
2. 使用答题纸时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写, 要字迹工整, 笔迹清晰; 超出答题区书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
3. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求。

1. 已知集合  $A = \{x | 2x^2 - 3x - 2 = 0\}$ ,  $B = \{x | y = \sqrt{2^{x-1}} - 1\}$ , 则  $A \cap B =$

A.  $\{1\}$       B.  $\{2\}$       C.  $\{1, 2\}$       D.  $\{-1, 2\}$

2. 若无穷等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则 " $d > 0$ " 是 " $\exists k \in \mathbb{N}^+, a_k > 0$ " 的
- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

3. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & x \leq 1 \\ -f(x-2), & x > 1 \end{cases}$ , 则  $f(2023)$  的值为

A. -1      B. 0      C.  $\frac{1}{2}$       D. 1

4. 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $AD = 2$ ,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EB}$ ,  $\angle BAD = \frac{\pi}{4}$ , 则  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} =$

A. 2      B.  $2\sqrt{2}$       C.  $2\sqrt{3}$       D. 4

5. 如图, 某数学兴趣小组欲测量一下校内旗杆顶部  $M$  和教学楼顶部  $N$  之间的距离, 已知旗杆  $AM$  高 15m, 教学楼  $BN$  高 21m. 在与  $A, B$  同一水平面  $C$  处测得的旗杆顶部  $M$  的仰角为  $30^\circ$ , 教学楼顶部  $N$  的仰角为  $60^\circ$ ,  $\angle ACB = 120^\circ$ , 则  $M, N$  之间的距离为



A.  $\sqrt{511}\text{m}$       B.  $\sqrt{1137}\text{m}$       C.  $\sqrt{1143}\text{m}$       D.  $\sqrt{1173}\text{m}$

6. 已知  $a = \log_2 2$ ,  $b = \sin \frac{1}{2}$ ,  $c = e^{0.5}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

- A.  $c > a > b$       B.  $c > b > a$       C.  $b > c > a$       D.  $b > a > c$

7. 斐波那契数列  $\{a_n\}$  以如下递归的方法定义  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  ( $n \geq 3, n \in \mathbb{N}^+$ ). 若斐波那契数列  $\{a_n\}$  对任意  $n \in \mathbb{N}^+$ , 存在常数  $p, q$ , 使得  $a_n, pa_{n+1}, qa_{n+2}$  成等差数列, 则  $p - q$  的值为

- A. 1      B. 3      C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{3}{2}$

高三数学试题 (第 1 页, 共 4 页)

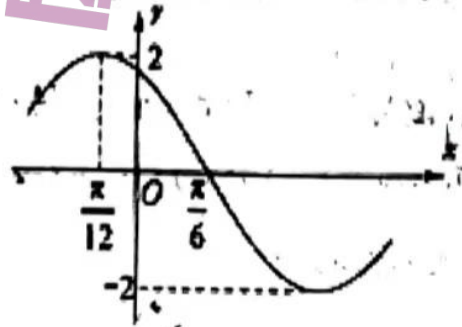
13. 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ , 满足  $f'(x)+1 = e^{2x}(1+f(-x)) \leq 0$ ,  $f(1) = e^1 - 1$ , 且当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x) - f(x) > 1$ , 则不等式  $f(x+1) > e^1 - 1$  的解集为

- A.  $(0, 2)$       B.  $(-1, 1)$       C.  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$       D.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$ ) 的部分图象如图所示, 则

- A.  $f(x) = 2 \cos(2x + \frac{\pi}{6})$   
 B. 函数  $f(x)$  的图象关于  $x = \frac{7\pi}{12}$  对称  
 C. 函数  $f(x)$  的图象关于  $(-\frac{\pi}{3}, 0)$  对称  
 D. 函数  $f(x)$  在  $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$  上单调递增

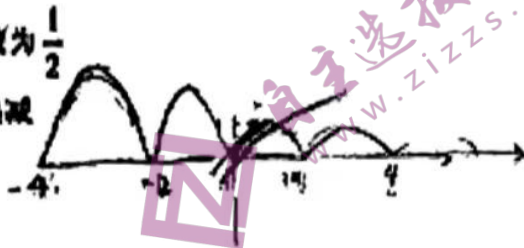


10. 已知  $\log_3 a > \log_3 b$ , 则下列不等式一定成立的有

- A.  $a^2 > b^2$       B.  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$       C.  $\frac{1}{b} > b - \frac{1}{a}$       D.  $(a+1)^b > (b+1)^a$

11. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 满足  $f(x-2) = 2f(x)$ , 且  $x \in [0, 2]$  时,  $f(x) = x(2-x)$ , 则

- A.  $x \in [-2, 0]$  时, 函数  $f(x)$  的最大值为  $\frac{1}{2}$   
 B. 函数  $f(x)$  在区间  $[-3, -2]$  上单调递减  
 C. 方程  $f(x) = \ln(x+1)$  有两个实根  
 D. 若  $f(t) \geq 3$ , 则  $t$  的最大值为  $-\frac{7}{2}$



已知数列  $\{a_n\}$ :  $1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ , 其中第一项是  $2^0$ , 接下来的两项是  $2^1, 2^1$ , 再接下来的三项是  $2^2, 2^1, 2^2$  以此类推. 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则

- A.  $S_{20} = 120$   
 B.  $a_{10} = 16$   
 C. 若  $S_n > 1000$ , 则  $n$  的最小值为 45  
 D. 若  $n > 200$  且存在  $m (m \in \mathbb{N}^*)$ , 使得  $S_n = 2^m + 1$ , 则  $m+n$  的最小值为 44

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 设向量  $a = (-1, m)$ ,  $b = (3, 2)$ , 若  $(a+b) \perp b$ , 则  $|a|$  的值为

14. 若  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a+3b=2$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{3}{b}$  的最小值为

15. 已知函数  $f(x) = \frac{2}{1+\cos 2x} + \frac{\sin 2x}{4(1-\cos 2x)}$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ), 则  $f(x)$  的最小值为

16. 若过点  $(2, m)$  有三条直线与函数  $f(x) = (x-1)^3 - 3x + 1$  的图象相切, 则实数  $m$  的取值范围为

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分) 已知函数  $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ , 其中  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\omega > 0$ , 函数  $f(x)$  图象上相邻的两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ .

(1) 求  $f(x)$  的解析式和单调递增区间;

(2) 若将函数  $f(x)$  图象上所有点横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变), 再向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度, 得到函数  $g(x)$  的图象, 求函数  $h(x) = (\sin x + \cos x) \cdot g(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的最大值.

18. (12分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_n > 1$ ;  $2S_n = a_n^2 + n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

(1) 求证:  $\{a_n\}$  是等差数列;

(2) 记  $b_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{(a_n-1)(a_n+1)}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $2n$  项和  $T_{2n}$ .

19. (12分) 牧草再生力强, 一年可收割多次, 富含各种微量元素和维生素, 因此成为饲养家畜的首选. 某牧草种植公司为提高牧草的产量和质量, 决定在本年度(第一年)投入80万元用于牧草的养护管理, 以后每年投入金额比上一年减少 $\frac{1}{5}$ , 本年度牧草销售收入估计为60万元, 由于养护管理更加精细, 预计今后的牧草销售收入每年会比上一年增加 $\frac{1}{4}$ .

- (1) 设 $n$ 年内总投入金额为 $a_n$ 万元, 牧草销售总收入为 $b_n$ 万元, 求 $a_n, b_n$ 的表达式.  
(2) 至少经过几年, 牧草销售总收入才能超过总投入? ( $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$ ).

(12分) 在① $3b = c + 3a \cos C$ , ② $2\sqrt{2}S = a^2 - (b-c)^2$ ,

③ $a \cos A + a \cos(B-C) = 4\sqrt{2}b \cos A \sin C$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并解答问题.

在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ ,  $S$ 为 $\triangle ABC$ 的面积, 且满足\_\_\_\_\_.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\frac{b^2+c^2}{2bc}$ 的取值范围.

注: 如果选择多个条件解答, 按第一个解答计分.

(12分) 已知函数 $f(x) = xe^x - \frac{a}{2}x^2 - ax (a \in \mathbb{R})$ .

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a > 1$ 时, 若方程 $f(x) = b$ 总共有三个不相等的实根, 求实数 $b$ 的取值范围.

(12分) 已知函数 $f(x) = \frac{(x+1)\ln x + a+1}{x}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , 且函数 $f(x)$ 有两个极值点.

(1) 求 $a$ 的范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 的两个极值点为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  且 $3x_1 \geq x_2$ , 求 $\ln x_1 + \ln x_2 + 2a$ 的最大值.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线



自主选拔在线  
www.zizzs.com

自主选拔在线  
www.zizzs.com

自主选拔在线  
www.zizzs.com