

2024 届高三第一次联考

理科数学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号和考籍号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。

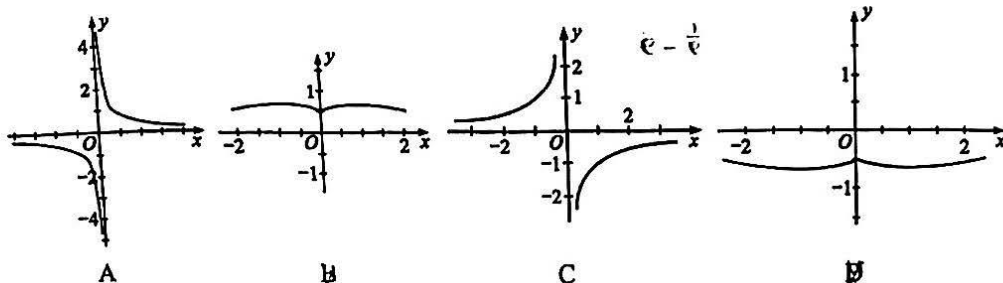
2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x^2 - 2x - 3 > 0\}$ ， $B = \{x | y = \log_3 x\}$ ，则 $(\complement_U A) \cap B =$
A. $[-1, 3]$ B. $(3, +\infty)$ C. $(0, 3]$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
2. 已知幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的图象过点 $P(3, 9)$ ，则 $\alpha =$
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3
3. 已知 i 为虚数单位， $\frac{3+ai}{1-i} = 2+i$ ，则 $z = 1+ai$ 的模为
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4
4. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$ ，若 $\sin 2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，则 $\frac{3\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} =$
A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{5}{7}$ C. -7 D. 7
5. 在 $\triangle ABC$ 中，“ $\cos A > 0$ ”是“ $\triangle ABC$ 为锐角三角形”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中， a_2, a_6 是方程 $x^2 - 8x + m = 0$ 两根，若 $a_3 a_5 = 3a_4$ ，则 m 的值为
A. 3 B. -3 C. 9 D. -9
7. 已知 $a = (1-m, 2)$ ， $b = (n, 1)$ ， $m > 0$ ， $n > 0$ ，若存在非零实数 λ 使得 $a = \lambda b$ ，则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为
A. 8 B. 9 C. 10 D. 12

8. 已知函数 $f(x) = \frac{2^{|x|}}{e^x - e^{-x}}$, 则函数 $f(x)$ 的图象可能是



9. 已知平行四边形 $ABCD$, 若点 M 是边 BC 的三等分点 (靠近点 B 处), 点 N 是边 AB 的中点, 直线 BD 与 MN 相交于点 H , 则 $\frac{BH}{BD} =$

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{4}$

10. 已知函数 $y = (2-x)(\ln a)^2 - 4\ln a + x + 2$, 若 $x \in [0, 2]$ 时, $y \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(0, e]$ B. $[e, +\infty)$ C. $(0, 1]$ D. $[1, +\infty)$

11. 若 $a = 3^{\frac{1}{4}}$, $b = (\frac{3}{2})^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x < 1, \\ -x^2 + 2x + a, & x \geq 1, \end{cases}$ 若 $5f(x) + 1 = 0$ 有 3 个实数解, 则实数 a 的取值范围为

- A. $[-\frac{1}{e}, +\infty)$ B. $[-\frac{6}{5}, +\infty)$ C. $[-\frac{1}{e}, e]$ D. $[-\frac{1}{e}, e-1]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数 $f(x) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi}{32}x) - 1, & x > 0, \\ (\frac{1}{2})^x, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f[f(-3)] =$ _____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n^2 - 4n$, 则 $a_1 + a_3 =$ _____.

15. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x$, 则不等式 $f(x) \geq f^2(x-1)$ 的解集为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}+m}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < e^2$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某地区运动会上，有甲、乙、丙三位田径运动员进入了男子 100 m 决赛，某同学决定运用高中所学的知识对该次决赛的情况进行预测，为此，他收集了这三位运动员近几年的大赛 100 m 成绩（单位：秒），若比赛成绩小于 10 秒则称为“破十”。

甲：10.54, 10.49, 10.31, 10.37, 9.97, 10.25, 10.11, 10.04, 9.97, 10.03；

乙：10.59, 10.32, 10.06, 9.99, 9.83, 9.91；

丙：10.03, 9.98, 10.10, 10.01.

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙三位运动员的比赛成绩相互独立。

(1) 分别估计甲、乙、丙三位运动员“破十”的概率；

(2) 设这三位运动员在这次决赛上“破十”的人数为 X ，估计 X 的数学期望 $E(X)$ 。

18. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $c(c-a) = (b-a)(b+a)$ 。

(1) 求角 B ；

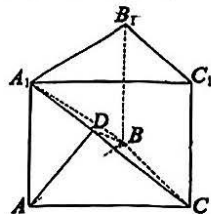
(2) 若 $\overline{CD} = 2\overline{DA}$ ， $BC = 6$ ， $BD = 2\sqrt{3}$ ，求 AC 的长。

19. (12 分)

如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面 ABC 是以 AC 为底边的等腰直角三角形， $AA_1 = 2$ ， $AC = 2\sqrt{2}$ 。

(1) 求证：平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ；

(2) 设点 D 为 A_1C 上一点，且满足 $\overline{A_1C} = 2\overline{A_1D}$ ，求二面角 $A - BD - C$ 的平面角大小。



20. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，短半轴 b 长为 1，点 P 在椭圆 E 上运动，且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大值为 $\sqrt{3}$ 。

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 当点 P 为椭圆 E 的上顶点时，过点 P 分别作直线 PM, PN 交椭圆 E 于 M, N 两点，设两直线 PM, PN 的斜率分别为 k_1, k_2 ，且 $k_1 + k_2 = 2$ ，求证：直线 MN 过定点。

21. (12分)

已知函数 $f(x) = x^2 \ln x + (\frac{m}{2} + \ln x)x$, $g(x) = x^3 + (\frac{3}{2} - \frac{3}{4}m)x^2 - \frac{3m}{2}x + \frac{3}{2}n$.

(1) 当 $m=0$ 时, 求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 设函数 $F(x) = \frac{2}{3}g(x) + f(x)$, 若 $F(x) \geq 0$ 恒成立, 求 $n-m$ 的最小值.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha, \\ y=-1+t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方

程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)。

(1) 求直线 l 和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 相交弦的中点坐标为 $(1, -1)$, 求直线 l 的极坐标方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x) = |x-a| + |x-1|$.

(1) 若 $a=3$, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若 $a>0$, 不等式 $f(x) \geq 2$ 恒成立, 求实数 a 的最小值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

