



高三数学考试参考答案

1. D 【解析】本题考查集合间的基本关系,考查数学运算的核心素养.

若 $2a+3=5$, 则 $a=1$, 此时 $a^2=1$, 不满足互异性; 若 $a^2=2a+3$, 则解得 $a=3$ 或 $a=-1$, 显然, $a=3$ 符合题意, 而当 $a=-1$ 时, $a^2=1$, 不满足互异性.

2. B 【解析】本题考查常用逻辑用语,考查逻辑推理的核心素养.

全称量词命题的否定为存在量词命题,故原命题的否定为 $\exists x \in (0, 1), \sin x \leq -x^2 + 2x - 1$.

3. C 【解析】本题考查函数的图象与性质,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

因为 $f(-x) = (e^{\log_2 |-x|} - e^{-\log_2 |-x|}) \cdot \sin(-x) = -(e^{\log_2 |x|} - e^{-\log_2 |x|}) \cdot \sin x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, A, B 错误. 又当 $0 < x < 1$ 时, $\log_2 |x| < 0 < -\log_2 |x|$, 所以 $e^{\log_2 |x|} < e^{-\log_2 |x|}$, $\sin x > 0$, 从而 $f(x) = (e^{\log_2 |x|} - e^{-\log_2 |x|}) \cdot \sin x < 0$, C 正确, D 错误.

4. B 【解析】本题考查常用逻辑用语,考查逻辑推理的核心素养.

由 $x^2 - 9 \leq 0$, 得 $-3 \leq x \leq 3$, 由 $\log_{0.5}(x-1) > -1$, 得 $1 < x < 3$, 所以 p 是 q 的必要不充分条件.

5. A 【解析】本题考查异面直线所成的角,考查直观想象的核心素养.

设 $AD = CD = 2$, 则 $AA_1 = 4$, 易知 $AD_1 \parallel BC_1$, 所以异面直线 D_1E 与 BC_1 所成的角为 $\angle AD_1E$. 经计算可知 $D_1E = \sqrt{17}$, $AD_1 = 2\sqrt{5}$, $AE = \sqrt{5}$, 所以 $\cos \angle AD_1E = \frac{17+20-5}{2\sqrt{17} \times 2\sqrt{5}} =$

$$\frac{8\sqrt{85}}{85}.$$

6. B 【解析】本题考查函数的应用,考查数学建模的核心素养.

设该挖掘机的声音强度为 x_1 , 普通室内谈话的声音强度为 x_2 , 由题意知 $\begin{cases} 10\lg \frac{x_1}{A_0} = 90, \\ 10\lg \frac{x_2}{A_0} = 50, \end{cases}$ 化简

$$\text{得} \begin{cases} \frac{x_1}{A_0} = 10^9, \\ \frac{x_2}{A_0} = 10^5, \end{cases} \text{ 所以 } \frac{x_1}{x_2} = 10^4.$$

7. D 【解析】本题考查旋转体的体积与侧面积,考查直观想象的核心素养.

设圆锥 PO_1 , PO 的底面圆半径分别为 r, R , 它们的母线长分别为 l, L , 因为 $\frac{V_{PO_1}}{V_{PO}} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{1}{8}$,

所以 $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$, 从而 $\frac{l}{L} = \frac{1}{2}$, 即 $R = 2r, L = 2l$. 所以 $\frac{S_{PO_1 \text{侧}}}{S_{PO \text{侧}}} = \frac{\pi rl}{\pi \cdot 2r \cdot 2l - \pi rl} = \frac{1}{3}$.

8. C 【解析】本题考查导数在研究函数中的应用,考查逻辑推理的核心素养.

$\forall x \geq 0, f(x) \leq 0$ 等价于 $\frac{\sin x}{2 + \cos x} \leq ax$. 记 $g(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x} - ax$, 即 $g(x) \leq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上



恒成立, $g'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} - a = -3(\frac{1}{2 + \cos x} - \frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3} - a$.

当 $\frac{1}{3} - a \leq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $g'(x) \leq 0$, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq g(0) = 0$, 即 $f(x) \leq 0$ 恒成立;

当 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时, 记 $h(x) = \frac{\sin x}{3} - ax$, 则 $h'(x) = \frac{\cos x}{3} - a$, 存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $h'(x_0) = 0$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 所以 $h(x) > h(0) = 0$, 即 $\frac{\sin x}{3} > ax$, 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\frac{\sin x}{2 + \cos x} \geq \frac{\sin x}{3} > ax$, 即 $f(x) > 0$, 不符合题意;

当 $a \leq 0$ 时, $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \pi a > 0$, 不符合题意.

综上, a 的取值范围是 $[\frac{1}{3}, +\infty)$.

9. BCD 【解析】本题考查复数的运算与几何意义, 考查数学运算的核心素养.

由题可得 $z = \frac{-1-i}{2+i} = \frac{-(2-i)}{4-i^2} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$, 即 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, 与点 $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ 关于原点对称, A 错误; C 正确; $\bar{z} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$, B 正确; $|z| = \sqrt{(-\frac{2}{5})^2 + (\frac{1}{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, D 正确.

10. BC 【解析】本题考查三角函数的图象与性质, 考查直观想象与数学运算的核心素养.

因为 $\begin{cases} A+b=3, \\ -A+b=-1, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} A=2, \\ b=1. \end{cases}$ 又 $\frac{1}{4}T = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$, 所以 $T = \pi$, 则 $\omega = 2$, 故 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi) + 1$. 将点 $(\frac{\pi}{3}, 1)$ 的坐标代入 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi) + 1$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 则 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$, B 正确; 若 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$, 则 $f(\frac{\pi}{3}) = 2$, A 错误; 而 $1 - 2\cos(2x + \frac{5\pi}{6}) = 1 - 2\cos(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$, C 正确; 若 $f(x) = 1 - 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$, 则 $f(0) = 0$, D 错误.

11. ABC 【解析】本题考查不等式, 考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

因为 $mn \leq (\frac{m+n}{2})^2$, 所以 $\log_3 m + \log_3 n = \log_3(mn) \leq \log_3(\frac{m+n}{2})^2 = 2 - \log_3 4$, 当且仅当 $m = n$ 时, 等号成立, A 正确; 易知 $e^m + e^n \geq 2\sqrt{e^m e^n}$, 即 $e^m + e^n \geq 2e^{\frac{m}{2}} e^{\frac{n}{2}}$, 所以 $e^m \geq 2e^{\frac{m}{2}} e^{\frac{n}{2}} - e^n$, $\frac{e^m}{e^{\frac{n}{2}}} \geq 2e^{\frac{m}{2}} - e^{\frac{n}{2}} \geq 2e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{2}{2}} > 0$, 故 $\ln \frac{e^m}{e^{\frac{n}{2}}} \geq \ln(2e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{n}{2}})$, B 正确; 因为 $\frac{2}{2m-1} + \frac{1}{n-1} = \frac{2}{2m-1} + \frac{2}{2n-2}$, $m+n=3$, 所以 $2m-1+2n-2=3$, $\frac{2}{2m-1} + \frac{1}{n-1} =$

【高三数学·参考答案 第2页(共8页)】



$\frac{1}{3}(\frac{2}{2m-1} + \frac{2}{2n-2})(2m-1+2n-2) = \frac{1}{3}(4 + \frac{4n-4}{2m-1} + \frac{4m-2}{2n-2})$, 因为 $\frac{4n-4}{2m-1} + \frac{4m-2}{2n-2} \geq 2\sqrt{4}$
 $= 4$, 所以 $\frac{1}{3}(4 + \frac{4n-4}{2m-1} + \frac{4m-2}{2n-2}) \geq \frac{8}{3}$, 当且仅当 $m = \frac{5}{4}, n = \frac{7}{4}$ 时, 等号成立, C 正确; $m^2 +$
 $n^2 = (m+n)^2 - 2mn = 9 - 2mn < 9$, D 错误.

12. ACD 【解析】本题考查数学文化与数列的求和, 考查数学抽象与数学运算的核心素养.

对于 A, 因为 $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$, 所以 $F_3 - F_2 = F_1, F_4 - F_3 = F_2, F_5 - F_4 = F_3, \dots, F_{2026} - F_{2025}$
 $= F_{2024}$, 上式两边分别相加得 $F_{2026} - F_2 = \sum_{i=1}^{2024} F_i$, 又 $F_1 = F_2 = 1$, 所以 $\sum_{i=1}^{2024} F_i = F_{2026} - 1$, A
 正确.

对于 B, 因为 $F_{n+1} = F_{n+2} - F_n$, 所以 $F_{n+1}^2 = F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+1}F_n$, 所以 $F_2^2 = F_3F_2 - F_2F_1, F_3^2 =$
 $F_4F_3 - F_3F_2, F_4^2 = F_5F_4 - F_4F_3, \dots, F_{2024}^2 = F_{2025}F_{2024} - F_{2024}F_{2023}$, 上式两边分别相加得 $F_2^2 +$
 $F_3^2 + \dots + F_{2024}^2 = F_{2025}F_{2024} - 1$, 所以 $\sum_{i=1}^{2024} F_i^2 = F_{2024}F_{2025}$, B 错误.

对于 C, 由题意知 $G_1 = 1, G_2 = 1, G_3 = 2, G_4 = 0, G_5 = 2, G_6 = 2, G_7 = 1, G_8 = 0, G_9 = 1, G_{10} = 1, \dots$,
 所以数列 $\{G_n\}$ 是最小正周期为 8 的数列, 故 $G_{2024} = G_8 = 0$, C 正确.

对于 D, $\sum_{i=1}^{2024} G_i = 253 \times (1+1+2+0+2+2+1+0) = 2277$, D 正确.

13. 3 【解析】本题考查平面向量的夹角与模, 考查数学运算的核心素养.

因为 $a \cdot (a - 2b) = |a|^2 - 2a \cdot b = 1 - 2|b| \times \frac{1}{2} = -2$, 所以 $|b| = 3$.

14. -3 【解析】本题考查三角恒等变换, 考查数学运算的核心素养.

因为 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \theta + 1}{1 - \tan \theta} = -\frac{1}{2}$, 所以 $\tan \theta = -3$.

15. 4 【解析】本题考查等比数列的性质与求和, 考查数学运算的核心素养.

设公比为 q , 因为 $a_5 = a_4 + 6a_3$, 所以 $q^2 - q - 6 = 0$, 解得 $q = 3$. 又由 $S_3 = 13$, 即 $a_1 + 3a_1 + 9a_1$
 $= 13$, 解得 $a_1 = 1$, 所以 $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$. 由 $\frac{3^n - 1}{2} < 41$, 得 $3^n < 83$, 所以 n 的最大值为 4.

16. 2024 【解析】本题考查抽象函数, 考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

由 $f(8-x) = f(x-4)$ 可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 从而 $f(4) = f(0) = 1$. 又 $f(x)$
 $+ f(x+4) = f(21)$, 令 $x=0$, 得 $f(21) = f(0) + f(4) = 2$, 则 $f(1) + f(5) = f(2) + f(6) =$
 $f(3) + f(7) = f(4) + f(8) = 2$. 由 $f(x) + f(x+4) = 2$, 得 $f(x+4) + f(x+8) = 2$, 可推出
 $f(x+8) = f(x)$, 故 $f(x)$ 的最小正周期为 8, 则 $f(21) = f(5) = 2, f(1) = 0$. 因为 $2025 = 8 \times$
 $253 + 1$, 所以 $\sum_{k=1}^{2025} f(k) = 253[f(1) + f(2) + \dots + f(8)] + f(1) = 2024$.

17. 解: (1) 因为 $\cos A = \frac{2c-a}{2b}$, 所以 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2c-a}{2b}$, 2 分
 整理得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$,
 所以 $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$, 4 分

【高三数学·参考答案 第3页(共8页)】



又因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 因为 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, $c = 3$, $b = \sqrt{13}$,

所以 $13 = a^2 + 9 - 3a$, 即 $a^2 - 3a - 4 = 0$, 7 分

解得 $a = 4$ 9 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 10 分

评分细则:

第一问另解:

因为 $\cos A = \frac{2c-a}{2b}$, 所以 $2b \cos A = 2c - a$ 1 分

由正弦定理得 $2 \cos A \sin B = 2 \sin(A+B) - \sin A$,

整理得 $2 \sin A \cos B - \sin A = 0$ 3 分

因为 $\sin A > 0$, 所以 $\cos B = \frac{1}{2}$ 4 分

又因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 5 分

18. 解: (1) 因为 $f(x) = x^2 - 3x + \ln x$, 所以 $f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$ 2 分

令 $f'(x) < 0$, 解得 $\frac{1}{2} < x < 1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$, 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减. 4 分

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最大值为 $f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4} - \ln 2$ 5 分

(2) $g(x) = x^2 - 6x + 4 \ln x$, 它的定义域是 $(0, +\infty)$, 且 $g'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} =$

$\frac{2(x-2)(x-1)}{x}$, 7 分

当 $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (1, 2)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增. 9 分

因为方程 $g(x) = 2m - 1$ 有 3 个不同的根, $g(1) = -5$, $g(2) = 4 \ln 2 - 8$, 10 分

所以 $4 \ln 2 - 8 < 2m - 1 < -5$, 解得 $2 \ln 2 - \frac{7}{2} < m < -2$, 即 m 的取值范围为 $(2 \ln 2 - \frac{7}{2}, -2)$ 12 分

评分细则:

【1】第一问, 写出 $f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, 得 2 分, 正确写出单调区间, 累计得 4 分, 第一问都正确, 累计得 5 分.

【高三数学·参考答案 第 4 页(共 8 页)】



【2】第二问, 写出 $g'(x) = 2x - 6 + \frac{4}{x} = \frac{2(x-2)(x-1)}{x}$, 累计得 7 分, 正确写出单调区间, 累计得 9 分, 正确计算出两个极值, 累计得 10 分, 直至求出正确答案, 累计得 12 分.

【3】采用其他方法, 参照本评分标准依步骤给分.

19. 解: (1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = 2a_1 - 2$, 解得 $a_1 = 2$ 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 2a_n - 2$, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$,

两式相减得 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 (n \geq 2)$, 3 分

所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 $a_n = 2^n$ 4 分

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 由 $b_3 + b_4 + b_5 = 21$, 可得 $b_4 = 7$, 5 分

又 $b_6 = 11$, 所以 $7 + 2d = 11$, 解得 $d = 2$, 故 $b_n = 2n - 1$ 6 分

(2) 令 $c_n = \frac{b_n}{a_n}$, 则由 (1) 可知 $c_n = \frac{2n-1}{2^n}$, 7 分

则 $T_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$, ①

$\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n+1}}$, ② 8 分

① - ②, 得 $\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2^{n-1}}) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} -$

$\frac{2n+3}{2^{n+1}}$ 11 分

所以 $T_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$ 12 分

评分细则:

【1】第一问, 写出 $a_1 = 2$, 得 1 分, 写出 $a_n = 2^n$, 累计得 4 分, 写出 $b_4 = 7$, 累计得 5 分, 求出 $b_n = 2n - 1$, 累计得 6 分.

【2】第二问, 求出 $c_n = \frac{2n-1}{2^n}$, 累计得 7 分, 求出 $\frac{1}{2} T_n = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2^{n+1}}$, 累计得 11 分, 直到给出正确结论得 12 分.

20. (1) 证明: 因为 $\triangle PBC$ 为等边三角形, D, O 分别是 BP, BC 的中点, 且 $BC = 2\sqrt{2}$, 所以 $DO = BD = \sqrt{2}$, 1 分

所以 $AD = \sqrt{3} DO = \sqrt{6}$ 2 分

又 $AB = 2$, 所以 $AB^2 + BD^2 = AD^2$, 即 $AB \perp BD$ 4 分

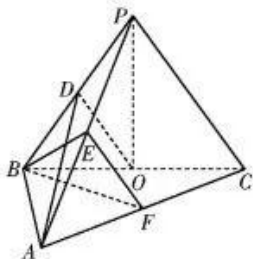
因为 $AB \perp BC$, $BC \cap BD = B$, 所以 $AB \perp$ 平面 PBC .

又 $AB \subset$ 平面 ABC , 所以平面 $ABC \perp$ 平面 PBC 5 分

(2) 解: 连接 PQ , 由已知可得 $PO \perp BC$,

又由 (1) 可知平面 $PBC \perp$ 平面 ABC ,

所以 $PO \perp$ 平面 ABC 6 分



因为 F 为 AC 的中点, 所以点 C 到平面 BEF 的距离等于点 A 到平面 BEF 的距离.

在直角 $\triangle ABC$ 中, 可知 $BF = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{8+2^2}}{2} = \sqrt{3}$, 7 分

在直角 $\triangle ABP$ 中, 可知 $BE = \frac{AP}{2} = \frac{\sqrt{8+2^2}}{2} = \sqrt{3}$, 8 分

因为 EF 是 $\triangle ACP$ 的中位线, 所以 $EF = \frac{PC}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $\triangle BEF$ 的面积 $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 9 分

设点 A 到平面 BEF 的距离为 d , 则三棱锥 $A-BEF$ 的体积 $V_{A-BEF} = \frac{\sqrt{5}}{6}d$ 10 分

又 $\triangle ABF$ 的面积 $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$, 点 E 到平面 ABF 的距离为 $\frac{OP}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以三棱

锥 $E-ABF$ 的体积 $V_{E-ABF} = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 11 分

由 $\frac{\sqrt{5}}{6}d = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 得 $d = \frac{2\sqrt{15}}{5}$, 即点 C 到平面 BEF 的距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ 12 分

评分细则:

【1】第一问中, 求出 $AD = \sqrt{3}$, $DO = \sqrt{6}$, 得 2 分, 证出 $AB \perp BD$, 累计得 4 分, 证出平面 $ABC \perp$ 平面 PBC , 累计得 5 分.

【2】第二问中, 证出 $PO \perp$ 平面 ABC , 累计得 6 分, 计算出 $S_{\triangle BEF} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 累计得 9 分, 计算出

$V_{E-ABF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 累计得 11 分, 直至正确求出点 C 到平面 BEF 的距离, 累计得 12 分.

21. 解: (1) 依题意可得调整后研发人员的年人均投入为 $(1 + \frac{2x}{1000})a$ 万元, 1 分

则 $(1000 - x)(1 + \frac{2x}{1000})a \geq 1000a$. 因为 $a > 0$, 所以 $\frac{2}{1000}x^2 - x \leq 0$, 解得 $0 \leq x \leq 500$, 3 分

因为 $x \in \mathbb{N}$ 且 $100 \leq x \leq 500$, 所以 $100 \leq x \leq 500$, 故 $500 \leq 1000 - x \leq 900$,

即要使这 $(1000 - x)$ 名研发人员的年总投入不低于调整前 1000 名技术人员的年总投入, 则调整后的研发人员的人数最少为 500. 5 分

(2) 由条件①研发人员的年总投入始终不低于技术人员的年总投入, 得 $(1000 - x)(1 + \frac{2x}{1000})a \geq x(m - \frac{3x}{1000})a$, 6 分

上式两边同除以 ax , 得 $(\frac{1000}{x} - 1)(1 + \frac{2x}{1000}) \geq m - \frac{3x}{1000}$, 整理得 $m \leq \frac{1000}{x} + \frac{x}{1000} + 1$ 7 分





由条件②技术人员年人均投入不减少,得 $a(m - \frac{3x}{1000}) \geq a$, 解得 $m \geq \frac{3x}{1000} + 1$ 8分

假设存在这样的实数 m , 使得技术人员在已知范围内调整后, 满足以上两个条件, 即 $\frac{3x}{1000} + 1 \leq m \leq \frac{1000}{x} + \frac{x}{1000} + 1 (100 \leq x \leq 500)$ 恒成立. 9分

设 $f(x) = \frac{1000}{x} + \frac{x}{1000} + 1 = \frac{1}{1000}(x + \frac{1000^2}{x}) + 1$, 易知 $f(x)$ 在 $(0, 1000)$ 上单调递减,

因为 $x \in \mathbb{N}$ 且 $100 \leq x \leq 500$, 所以 $f(x)$ 在 $[100, 500]$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\min} = \frac{1000}{500} + \frac{500}{1000} + 1 = 3.5$, 当 $x = 500$ 时, 等号成立, 所以 $m \leq 3.5$ 10分

又因为 $100 \leq x \leq 500$, 当 $x = 100$ 时, $(\frac{3x}{1000} + 1)_{\max} = 2.5$, 所以 $m \geq 2.5$, 11分

所以 $2.5 \leq m \leq 3.5$, 即存在这样的 m 满足条件, m 的取值范围为 $[2.5, 3.5]$ 12分
评分细则:

【1】第一问, 写出调整后研发人员的年人均投入为 $(1 + \frac{2x}{1000})a$ 万元, 得 1 分, 写出 $0 \leq x \leq 500$, 累计得 3 分, 写出调整后的研发人员的人数最少为 500, 累计得 5 分.

【2】第二问, 求出 $(1000 - x)(1 + \frac{2x}{1000})a \geq x(m - \frac{3x}{1000})a$, 累计得 6 分, 求出 $m \geq \frac{3x}{1000} + 1$, 累计得 8 分, 写出 $\frac{3x}{1000} + 1 \leq m \leq \frac{1000}{x} + \frac{x}{1000} + 1 (100 \leq x \leq 500)$ 恒成立, 累计得 9 分, 直到给出正确结论得 12 分.

22. 解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^{4x-1} - 4\ln(2x)$, 所以 $f'(x) = 4e^{4x-1} - \frac{4}{x}$, 2分

$f'(\frac{1}{2}) = 4e - 8$, $f(\frac{1}{2}) = e$, 所以切线方程为 $y - e = (4e - 8)(x - \frac{1}{2})$, 即 $y = (4e - 8)x - e + 4$ 4分

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f(x) \geq a + a\ln(2a)$, 即 $e^{4x-1} - 4a\ln(2x) - a - a\ln(2a) \geq 0$ 5分

设 $g(x) = e^{4x-1} - 4a\ln(2x) - a - a\ln(2a)$, 则 $g'(x) = 4e^{4x-1} - \frac{4a}{x}$, 6分

因为 $a > 0$, 所以 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $g'(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g'(x) \rightarrow +\infty$, 所以存在唯一的 $x_0 > 0$, 使 $g'(x_0) = 4e^{4x_0-1} - \frac{4a}{x_0} = 0$,

且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$.

由 $g'(x_0) = 4e^{4x_0-1} - \frac{4a}{x_0} = 0$, 得 $a = x_0 e^{4x_0-1}$, 则 $\ln(2a) = \ln(2x_0) + 4x_0 - 1$ 8分

所以 $g(x)_{\min} = e^{4x_0-1} - 4a\ln(2x_0) - a - a\ln(2a) = e^{4x_0-1} - x_0 e^{4x_0-1} [4\ln(2x_0) + 1 + \ln(2a)] = e^{4x_0-1} [1 - 5x_0\ln(2x_0) - 4x_0^2] \geq 0$ 9分



因为 $1 - 5x_0 \ln(2x_0) - 4x_0^2 = x_0 \left[\frac{1}{x_0} - 5\ln(2x_0) - 4x_0 \right] \geq 0$, 所以 $\frac{1}{x_0} - 5\ln(2x_0) - 4x_0 \geq 0$

..... 10 分

设 $h(x) = \frac{1}{x} - 5\ln(2x) - 4x$, 易知它在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 注意到 $h(\frac{e}{2}) = 0$, 所以 $0 < x_0$

$\leq \frac{1}{2}$. 又 $a = x_0 e^{4x_0 - 1}$, 设 $u(x) = x e^{4x - 1} (0 < x \leq \frac{1}{2})$, 则 $u'(x) = (4x + 1)e^{4x - 1} > 0$, 11 分

可知 $u(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上单调递增, 则 $a \in (0, \frac{e}{2}]$, 即实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{e}{2}]$ 12 分

评分细则:

【1】第一问, 写出 $f'(x) = 4e^{4x-1} - \frac{4}{x}$, 得 2 分, 正确求出曲线 $y = f(x)$ 的切线方程, 累计得 4 分.

【2】第二问, 写出 $g'(x) = 4e^{4x-1} - \frac{4a}{x}$, 累计得 6 分, 推导出 $\ln(2a) = \ln(2x_0) + 4x_0 - 1$, 累计得 8 分, 推出 $e^{4x_0} [1 - 5x_0 \ln(2x_0) - 4x_0^2] \geq 0$, 累计得 9 分. 证出 $u'(x) = (4x + 1)e^{4x-1} > 0$, 累计得 11 分, 求出实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{e}{2}]$, 累计得 12 分.

【3】采用其他方法, 参照本评分标准依步骤给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线