2023—2024 学年天一大联考安徽高二(上)期中考试
皖豫名校联盟 & 安徽卓越县中联盟

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　B

命题意图　本题考查空间向量的线性运算.

解析　$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$.

2. 答案　C

命题意图　本题考查直线的斜率与倾斜角.

解析　直线 $3x+\sqrt{3}y+1=0$ 的斜率 $k=-\sqrt{3}$,其倾斜角 θ 满足 $0°\leqslant\theta<180°$,因为 $\tan\theta=-\sqrt{3}$,所以 $\theta=120°$.

3. 答案　A

命题意图　本题考查圆的一般方程.

解析　由题意得,圆的半径 $r=|AB|=\sqrt{(1+1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$,所以圆的标准方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=5$,所以圆的一般方程为 $x^2+y^2+2x-2y-3=0$.

4. 答案　A

命题意图　本题考查两直线平行的定义.

解析　直线 $(a+1)x+ay+3=0$ 与直线 $2ax+y-5=0$ 平行的充要条件是 $a+1=2a^2$ 且 $-5(a+1)\neq 6a$,解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{2}$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查空间向量的坐标运算.

解析　由 $\boldsymbol{a}=(2,x,-2)$,且 $|\boldsymbol{a}|=3$,得 $\sqrt{4+x^2+4}=3$①. 由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+4x-2y=0$②. 由①②可得 $\begin{cases}x=1,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=0,\end{cases}$ 则 xy 的值为 0 或 4.

6. 答案　B

命题意图　本题考查椭圆的性质及基本不等式.

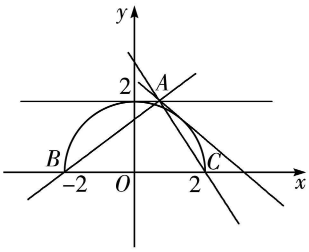
解析　因为 $|MF_1|+|MF_2|=2a$,所以 $|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant\left(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{2}\right)^2=a^2=25$(当且仅当 $|MF_1|=|MF_2|=5$ 时,等号成立). 由题可知 C 的半焦距 $c=2$,所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{5}$.

7. 答案　D

命题意图　本题考查直线与圆的位置关系.

解析　显然直线 $y=m(x-1)+2$ 恒过点 $A(1,2)$,曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 为半圆,当直线与半圆相切时,有 $\frac{|2-m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$,

解得 $m=0$ 或 $m=-\frac{4}{3}$，由如图所示的图象知直线过点 $(-2,0)$ 时，斜率 $m=\frac{2}{3}$，直线过点 $(2,0)$ 时，斜率 $m=-2$，所以半圆 $y=\sqrt{4-x^2}$ 与直线 $y=m(x-1)+2$ 有两个不同的交点时，$0<m\leqslant\frac{2}{3}$ 或 $-2\leqslant m<-\frac{4}{3}$，所以实数 m 的取值范围为 $\left[-2,-\frac{4}{3}\right)\cup\left(0,\frac{2}{3}\right]$.



8. **答案**　C

命题意图　本题考查椭圆的离心率.

解析　设椭圆的半焦距为 $c(c>0)$. 圆 $(x+2)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$ 与坐标轴的公共点为 $(-3,0)$，$(-1,0)$，$(0,\sqrt{3})$，又椭圆的焦点在 x 轴上，所以，①若椭圆的上顶点为 $(0,\sqrt{3})$，左焦点为 $(-3,0)$ 或 $(-1,0)$，即 $b=\sqrt{3}$，$c=3$ 或 $c=1$，则 $a=2\sqrt{3}$ 或 $a=2$，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$；②若椭圆的左顶点为 $(-3,0)$，左焦点为 $(-1,0)$，则 $a=3$，$c=1$，离心率 $e=\frac{1}{3}$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. **答案**　ACD

命题意图　本题考查直线的方程.

解析　当直线的截距不为 0 时，设直线的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，由题可得 $\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1,\\ |a|=|b|,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1,\\ a=b\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1,\\ a=-b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\end{cases}$ 所以直线方程为 $x+y-3=0$ 或 $x-y-1=0$，故 A 正确，B 错误，C 正确；当直线的截距为 0 时，设直线方程为 $y=kx$，由题可知 $k=\frac{1}{2}$，故直线方程为 $x-2y=0$，D 正确.

10. **答案**　BD

命题意图　本题考查空间向量的应用.

解析　$\because \boldsymbol{a}=(-1,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,2,-1)$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times2+1\times2+2\times(-1)=-2\neq0$，$\therefore$ 直线 l 与 m 不垂直，故 A 错误；$\because \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}=-3+1+2=0$，$\therefore l/\!/\alpha$ 或 $l\subset\alpha$，故 B 正确；$\because \frac{4}{-2}=\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{2}$，$\therefore \boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 不共线，$\therefore \alpha/\!/\beta$ 不成立，故 C 错误；由题可知 $\begin{cases}\boldsymbol{c}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{c}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-s+2=0,\\ -s+1+t=0,\end{cases}$ 解得 $t=1$，故 D 正确.

11. **答案**　BC

命题意图 本题考查圆与圆的位置关系.

解析 圆 C_2 的方程可化为 $(x-m)^2+(y+2m)^2=(m+1)^2$，圆心为点 $(m,-2m)$，恒在直线 $2x+y=0$ 上，故A错误；由题可知 $(-1-m)^2+(1+2m)^2=(m+1)^2$，解得 $m=-\frac{1}{2}$，所以圆 C_2 的半径为 $\frac{1}{2}$，故B正确；当 $m=-2$ 时，$|C_1C_2|=\sqrt{(m+1)^2+(-2m-1)^2}=\sqrt{10}>|m+1|+1=2$，两圆相离，所以圆 C_1 与圆 C_2 有4条公切线，故C正确；当 $m=0$ 时，圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在直线的方程为 $x-y+1=0$，$C_1(-1,1)$ 到公共弦所在直线的距离为 $\frac{|-1-1+1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，故D错误.

12. **答案** ABC

命题意图 本题考查数学文化.

解析 由题可知 C 的蒙日圆的半径为 $\sqrt{a^2+b^2}=3$，则蒙日圆的方程为 $x^2+y^2=9$，故A正确；设正方形 G 的边长为 $t(t>0)$，由题可知 $t^2+t^2=(2a)^2+(2b)^2=36$，则 $t=3\sqrt{2}$，故B正确；易知点 $(4,m)$ 在圆 $x^2+y^2=9$ 外部，所以若圆 $(x-4)^2+(y-m)^2=4$ 与 C 的蒙日圆有且仅有一个公共点，则两圆外切，所以 $\sqrt{4^2+m^2}=3+2$，解得 $m=\pm 3$，故C正确；设直线 l 与圆 $x^2+y^2=9$ 交于 A,B 两点，联立 $\begin{cases}x+2y-3=0,\\x^2+y^2=9,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x_1=-\frac{9}{5},\\y_1=\frac{12}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=0,\end{cases}$ 不妨设 $A\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$，$B(3,0)$，当点 P 与点 A 或 B 重合时，$\angle MPN$ 为直角，且 $k_{OA}=-\frac{4}{3}$，$k_{OB}=0$，所以直线 OP 的斜率为 $-\frac{4}{3}$ 或0，故D错误.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. **答案** 6

命题意图 本题考查平面的法向量的定义.

解析 因为 $\overrightarrow{AB}=(t-3,3,-3)$，且 $\overrightarrow{AB}\perp \boldsymbol{m}$，所以 $2(t-3)-3-3=0$，解得 $t=6$.

14. **答案** $\frac{3}{2}$

命题意图 本题考查椭圆的性质及点到直线的距离.

解析 由题可知椭圆的右焦点坐标为 $(\sqrt{3},0)$，所以右焦点到直线 $y=\sqrt{3}x$ 的距离是 $\frac{|3-0|}{2}=\frac{3}{2}$.

15. **答案** $\left(-\infty,-\frac{12}{5}\right]\cup[0,+\infty)$

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 设 $A(0,-2)$，由题知圆 M 的圆心为 $M(2,1)$，半径 $r=3$，a 表示直线 PA 的斜率，不妨设过点 A 的圆的切线方程为 $y=kx-2$，则圆心 M 到切线的距离 $d=\frac{|2k-2-1|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得 $k=0$ 或 $-\frac{12}{5}$，再结合图可知，实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{12}{5}\right]\cup[0,+\infty)$.

16. **答案** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

命题意图 本题考查椭圆的方程与性质.

解析 由题可知$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，$|MF_1|+|MF_2|=4$. 因为MP平分$\angle F_1MF_2$，所以P到MF_1，MF_2的距离相等，设为h，则$S_{MF_1PF_2}=\frac{1}{2}(|MF_1|+|MF_2|)h=2h$. 易知$OE$是$\triangle F_1MF_2$的中位线，延长$F_1P$，$MF_2$交于点$G$，则$P$为$F_1G$的中点，过$F_1$作$F_1H\perp MG$于$H$，易得$|F_1H|=2h=|F_1F_2|\sin\angle MF_2F_1$，则$S_{MF_1PF_2}=2\sqrt{3}\sin\angle MF_2F_1=2\sqrt{2}$，从而$\sin\angle MF_2F_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

四、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查圆的方程及圆与圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）由题可得$\begin{cases}9-6a+b-4=0,\\4+1-2a+b-4=0,\end{cases}$ ……（1分）

解得$\begin{cases}a=1,\\b=1,\end{cases}$ ……（3分）

所以圆M的一般方程为$x^2+y^2-2y-3=0$，标准方程为$x^2+(y-1)^2=4$， ……（4分）

故圆M的半径为2. ……（5分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知$M(0,1)$.

又$N(0,-m^2-2)$，所以$|MN|=m^2+3$. ……（7分）

因为$m^2+3>3=1+2$，

所以圆M与圆N外离. ……（10分）

18. **命题意图** 本题考查求直线的方程.

解析 （Ⅰ）设与直线m:$3x+4y+12=0$垂直的直线的方程为$4x-3y+a=0$. ……（2分）

圆C可化为$(x+1)^2+(y-2)^2=9$，圆心为$C(-1,2)$， ……（4分）

因为直线$4x-3y+a=0$经过圆心C，所以$4\times(-1)-3\times2+a=0$，即$a=10$，

故所求直线的方程为$4x-3y+10=0$. ……（6分）

（Ⅱ）设与直线m:$3x+4y+12=0$平行的直线的方程为$3x+4y+c=0(c\neq12)$. ……（8分）

因为直线$3x+4y+c=0$与圆C相切，

所以圆心$C(-1,2)$到直线$3x+4y+c=0$的距离等于半径，即$\frac{|3\times(-1)+4\times2+c|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$， ……（10分）

所以$|c+5|=15$，$c=-20$或10，

故所求直线的方程为$3x+4y-20=0$或$3x+4y+10=0$. ……（12分）

19. **命题意图** 本题考查空间向量的坐标运算.

解析 （Ⅰ）$\because A(2,-1,1)$，$B(1,1,0)$，$C(4,-3,3)$，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\boldsymbol{a}=(-1,2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2,2)$， ……（2分）

于是$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,4,-2)-(2,-2,2)=(-4,6,-4)$， ……（4分）

$\therefore |2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-4)^2+6^2+(-4)^2}=2\sqrt{17}$. ……………………………………………… (6 分)

(Ⅱ) $\because 2k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2k,4k,-2k)-(2,-2,2)=(-2k-2,4k+2,-2k-2)$, ………………………… (7 分)

$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(-1,2,-1)+(2k,-2k,2k)=(2k-1,2-2k,2k-1)$, ……………………………………… (8 分)

又 $2k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 互相垂直,

$\therefore (2k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})=0$, ……………………………………………………………… (9 分)

即 $(-2k-2)(2k-1)+(4k+2)(2-2k)+(-2k-2)(2k-1)=0$, ………………………………………… (10 分)

$\therefore k^2=\frac{1}{2}, k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查圆的方程及直线与圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)由题可知圆 C 的圆心为 $C(0,0)$,半径 $r=3$.

所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2=9$. ………………………………………………………………………… (3 分)

(Ⅱ)当直线 l 的斜率存在且不为 0 时,设直线 l 的方程为 $y=kx+2$,圆心到直线 l 的距离为 d,

则 $d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$, $|MN|=2\sqrt{3^2-d^2}=2\sqrt{9-\frac{4}{k^2+1}}$,

同理可得 $|PQ|=2\sqrt{9-\frac{4}{\left(\frac{1}{k}\right)^2+1}}=2\sqrt{9-\frac{4k^2}{k^2+1}}$, …………………………………………… (5 分)

则 $S_{PMQN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{9-\frac{4}{k^2+1}}\times2\sqrt{9-\frac{4k^2}{k^2+1}}=2\sqrt{\left(9-\frac{4}{k^2+1}\right)\left(9-\frac{4k^2}{k^2+1}\right)}\leqslant9-\frac{4}{k^2+1}+9-\frac{4k^2}{k^2+1}=14$,

当且仅当 $9-\frac{4}{k^2+1}=9-\frac{4k^2}{k^2+1}$,即 $k^2=1$ 时等号成立. ………………………………………… (8 分)

当直线 l 的斜率不存在时, $|MN|=6$, $|PQ|=2\sqrt{3^2-2^2}=2\sqrt{5}$, ………………………………… (10 分)

此时 $S_{PMQN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$.

当直线 l 的斜率为 0 时,根据对称性可得 $S_{PMQN}=6\sqrt{5}$. …………………………………………… (11 分)

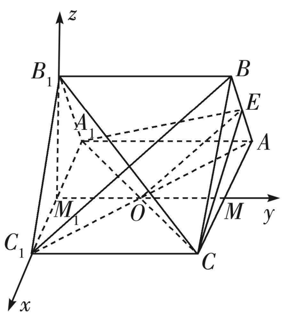
综上所述,四边形 $PMQN$ 面积的最大值为 14. ………………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查线面平行与线面角.

解析 (Ⅰ)如图,连接 AC_1 交 A_1C 于点 O,连接 OE,显然 O 是 AC_1 的中点,

因为 E 为 AB 的中点,所以 OE 为 $\triangle ABC_1$ 的中位线, $OE/\!/BC_1$,

而 $BC_1\not\subset$ 平面 EA_1C, $OE\subset$ 平面 EA_1C,所以 $BC_1/\!/$平面 EA_1C. ……………………………… (4 分)



（Ⅱ）设 A_1C_1 的中点为 M_1，连接 M_1O 并延长交 AC 于点 M.

因为 $BA=BC$，所以 $B_1A_1=B_1C_1$，于是有 $B_1M_1\perp A_1C_1$.

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以平面 $A_1B_1C_1\perp$ 平面 A_1ACC_1，

而平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $A_1ACC_1=A_1C_1$，所以 $B_1M_1\perp$ 平面 A_1ACC_1.

因为侧面 A_1ACC_1 是矩形，所以 $A_1C_1\perp M_1M$.

以 M_1 为原点，分别以直线 A_1C_1，M_1M，B_1M_1 为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $BA=BC=t(t>1)$，则 $A_1(-1,0,0)$，$C(1,\sqrt{2},0)$，$E\left(-\frac{1}{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{t^2-1}}{2}\right)$，…………（6分）

于是 $\overrightarrow{CA_1}=(-2,-\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CE}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{t^2-1}}{2}\right)$. …………（7分）

设平面 EA_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x-\sqrt{2}y=0,\\ -\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{t^2-1}}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，可得 $\boldsymbol{n}=\left(1,-\sqrt{2},\frac{3}{\sqrt{t^2-1}}\right)$. …………（8分）

易知平面 A_1CA 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$.

因为二面角 $E-A_1C-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$，所以 $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $\dfrac{\frac{3}{\sqrt{t^2-1}}}{\sqrt{3+\frac{9}{t^2-1}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $t=\sqrt{2}$（负值舍去）. …………（10分）

故 $B_1(0,0,1)$，$\overrightarrow{B_1C}=(1,\sqrt{2},-1)$，$\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{2},3)$.

设直线 B_1C 与平面 EA_1C 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{B_1C}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{B_1C}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|1-2-3|}{2\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即直线 B_1C 与平面 EA_1C 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………（12分）

22. **命题意图** 本题考查直线与圆的综合应用.

解析 （Ⅰ）由题可知点 O 在圆 C 上，且圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$，…………（1分）

整理得 $x^2+y^2-2ax-2by=0$，

则 $A(2a,0)$，$B(0,2b)$. …………（2分）

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2a\times2b=2ab=2$，为定值. …………（3分）

（Ⅱ）因为直线 $x-y=0$ 经过圆 C 的圆心，

所以 $a=b$. …………（4分）

又 $ab=1$，$a>0$ 且 $b>0$，解得 $a=b=1$. …………（6分）

所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$. …………（7分）

（Ⅲ）显然 P,G,C,H 四点共圆，且 PC 为该圆的一条直径，设这四点所在的圆为圆 N，$P(-2m-2,m)$，

则圆 N 的方程为 $\left(x+\frac{1+2m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1+m}{2}\right)^2=\left(\frac{3+2m}{2}\right)^2+\left(\frac{1-m}{2}\right)^2$，

即 $x^2+y^2+(2m+1)x-(m+1)y-m-2=0$,① ………………………………………………………… (8 分)

又圆 C 的半径 $r=\sqrt{2}$,方程可化为 $x^2+y^2-2x-2y=0$,②

①-②,得圆 C 与圆 N 的相交弦 GH 所在直线的方程为 $(2m+3)x+(1-m)y-m-2=0$. …………… (9 分)

点 $C(1,1)$ 到直线 GH 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{(2m+3)^2+(1-m)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5m^2+10m+10}}$, ……………………… (10 分)

所以 $|GH|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2-\dfrac{4}{5m^2+10m+10}}=2\sqrt{2}\sqrt{1-\dfrac{2}{5m^2+10m+10}}=2\sqrt{2}\sqrt{1-\dfrac{2}{5(m+1)^2+5}}$,

所以当 $m=-1$ 时,$|GH|$ 取得最小值 $\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$,

故线段 GH 长度的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$. ……………………………………………………………………… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。