绝密★启用前

2024年普通高等学校全国统一模拟招生考试
金科·新未来11月联考

数　学

全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生号

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用2B铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑；非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚。
4. 考试结束后，请将试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,|2x-1|<6\}$，$B=\{-3,0,1,2,3,4\}$，则 $A\cap B=$

　A. $\{-3,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{\ldots 2,3,4\}$

2. 已知 i 是虚数单位，则复数 $\dfrac{3+i}{1+2i}=$

　A. $2-i$　　B. $2+i$　　C. $1+i$　　D. $1-i$

班级

3. 已知向量 $a=(1,-2)$，$b=(3,-1)$，$c=(x,4)$，若 $(a+c)\perp(b+c)$，则 $x=$

　A. 3　　B. -1　　C. 2　　D. 4

4. 已知函数 $f(x)=2^{2x}-a\cdot 2^{x}+4$，若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为

　A. $(-\infty,4]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $[4,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

5. 中国是瓷器的故乡，"瓷器"一词最早见之于许慎的《说文解字》中．某瓷器如图1所示，该瓷器可以近似看作由上半部分圆柱和下半部分两个圆台组合而成，其直观图如图2所示，已知圆柱的高为18 cm，底面直径 $AB=12$ cm，$CD=20$ cm，$EF=14$ cm，中间圆台的高为3 cm，下面圆台的高为4 cm，若忽略该瓷器的厚度，则该瓷器的侧面积约为

图1

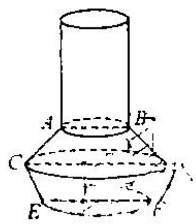


图2

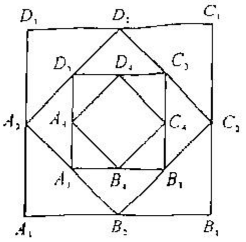
　A. $375\pi\ cm^2$　　B. $377\pi\ cm^2$　　C. $379\pi\ cm^2$　　D. $381\pi\ cm^2$

姓名

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} ax+1-a, 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2^{x^2\cdots}, 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 若 $\forall x_1,x_2\in[0,2]$，$x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ 成立，则 a 的取值范围为

A. $(0,2]$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $(0,1]$　　D. $(0,+\infty)$

7. 如图，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1，记其面积为 S_1，取其四边的中点 A_2,B_2,C_2,D_2，作第二个正方形 $A_2B_2C_2D_2$，记其面积为 S_2，然后再取正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 各边的中点 A_3,B_3,C_3,D_3，作第三个正方形 $A_3B_3C_3D_3$，记其面积为 S_3，如果这个作图过程一直继续下去，记这些正方形的面积之和 $S=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n+\cdots$，则面积之和 S 将无限接近于



A. $\frac{3}{2}$　　B. 2

C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，导函数为 $f'(x)$，不等式 $\frac{f(x)}{x+1}+\ln(x+1)\cdot f'(x)\geqslant\ln(x+1)\cdot f(x)$ 恒成立，且 $f(4)=\frac{e^4}{\ln 5}$，则不等式 $\ln(x+3)\cdot f(x+2)\geqslant e^{x+2}$ 的解集为

A. $[2,+\infty)$　　B. $(-1,2]$　　C. $[0,+\infty)$　　D. $(0,2]$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $\tan\theta=3$，则

A. $\frac{\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}=\frac{1}{5}$　　B. $\tan\left(\theta-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$　　C. $\sin^2\theta+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=3$

10. 下列四个结论中正确的是

A. 已知 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一组基底，则 $\{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\}$ 也是空间的一组基底

B. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,-2,9)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,2)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为 $(3,6,6)$

C. 若 A,B,C,D 四点共面，则存在实数 x,y，使 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$

D. 已知空间中的点 $A(1,0,2)$，$B(0,1,2)$，$C(1,3,0)$，$D(-1,2,2)$，则直线 AB 与直线 CD 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}$ [illegible]，且 $a_1=1$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，且数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=na_n$，则

A. $a_n=n^2+n$　　B. $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 的前 10 项和为 55

C. 当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n-b_{n-1}=3a_n-3n+1$　　D. $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{\quad}$

12. 已知函数 $f(x)=x^3(3\ln x-1)$，则

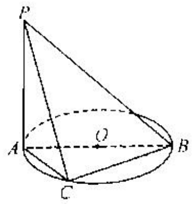
A. 函数 $f(x)$ 的最小值为 -1

B. 若函数 $f(x)$ 在点 $(m,f(m))$ 处的切线与直线 $y=9e^2x-1$ 平行，则 $f(m)=2e^3$

C. 函数 $g(x)=f(x)-a(a>0)$ 有且仅有两个零点

D. $f\left(\ln\left(\frac{3e}{2}\right)\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f(\log_2 3)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

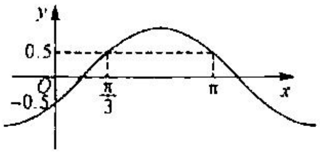


13. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2>1$”的否定是________.

14. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2\cdot 2^x}{4^{ax}+1}$ 为偶函数，则 $a=$________.

15. 如图，直线 PA 垂直于圆 O 所在的平面，$\triangle ABC$ 内接于圆 O，且 AB 为圆 O 的直径，$AB=8$，$AP=6$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为________.

16. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(其中 A>0, \omega>0, -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如下图所示，若 $f(x)$ 在区间 $(-m,m)$ 上有且仅有两个零点，则实数 m 的取值范围为________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在$\triangle ABC$中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\dfrac{1}{2}c\sin B=(c-a\cos B)\sin C$.

(1) 求 A；

(2) 若 D 为边 AB 上一点，$AD=2DB$，$AC=2$，$BC=\sqrt{7}$，求$\triangle ACD$ 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

在正项等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}^2=a_n^2+2n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

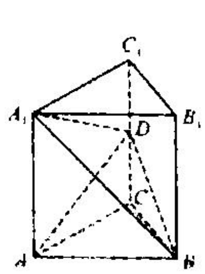
(2) 记 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=2$，D 为 CC_1 的中点.

(1) 证明：$A_1B\perp AD$；

(2) 求平面 ABD 与平面 A_1BD 的夹角的余弦值.



20.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=\sin x-ax$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的图象在点 $\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)若 $f(x)\geqslant 0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，求实数 a 的最大值.

21.（本小题满分12分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_{n+1}=a_n-\frac{3}{2}$ 且 $a_1=\frac{1}{2}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n+b_{n+2}=2b_{n+1}$ 且 $b_1=2a_1$，$b_3=4a_1-a_3$.

(1)求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $c_n=\left(a_n+\frac{3}{2}\right)\cdot b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

(3)在(2)的条件下，对于实数 m，存在正整数 n，使得 $S_n\leqslant m$ 成立，求 m 的最小值.

22.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=ae^{x-1}+\ln x-(a+1)x$

(1)当 $a=1$ 时，证明：函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

(2)若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，求实数 a 的取值范围.

金科大联考·2024届高三11月质量检测·数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	A	D	C	B	A
题号	9	10	11	12				
答案	AB	AD	BCD	ABD				

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】C

【解析】$A=\left\{x\middle|-\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}\right\}$，可知 $A\cap B=\{0,1,2,3\}$.故选C.

2.【答案】D

【解析】$\frac{3+i}{1+2i}=\frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5-5i}{5}=1-i$.故选D.

3.【答案】A

【解析】由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(x+1,2)$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(x+3,3)$，又由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})/\!/(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，有 $2(x+3)=3(x+1)$，解得 $x=3$.故选A.

4.【答案】A

【解析】由 $f(x)\geqslant 0$，有 a $\frac{1}{2^x}$，又由 $2^x+\frac{4}{2^x}\geqslant 2\sqrt{2^x\times\frac{4}{2^x}}=4$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），可得 $a\leqslant 4$.故选A.

5.【答案】D

【解析】由 $AC=\sqrt{3^2+\left(\frac{CD-AB}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{20-12}{2}\right)^2}=5$ cm，$CE=\sqrt{4^2+\left(\frac{CD-EF}{2}\right)^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{20-14}{2}\right)^2}=5$ cm，可得该容器的侧面积为 $2\pi\times6\times18+5\times(6+10)\pi+5\times(7+10)\pi=381\pi$ cm².故选D.

6.【答案】C

【解析】因为对于 $\forall x_1,x_2\in[0,2]$，$x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ 成立，所以函数 $f(x)$ 是增函数，则函数 $y=ax+1-a\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 和 $y=2^{x^2-ax}\ (1<x\leqslant 2)$ 均为增函数，且有 $1\leqslant 2^{1-a}$，即 $\begin{cases}a>0,\\ \frac{a}{2}\leqslant 1,\\ 2^{1-a}\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$.故选C.

7.【答案】B

【解析】设正方形 $A_nB_nC_nD_n$ 的面积为 S_n，可得数列 $\{S_n\}$ 是以1为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2$，可得所有这些正方形的面积之和将无限接近于2.故选B.

8.【答案】A

【解析】设 $g(x)=\ln(x+1)\cdot f(x)$，$x>-1$，则由题意可知 $g'(x)\geqslant g(x)$，设 $h(x)=e^{-x}\cdot g(x)$，$x>-1$，则 $h(x)=e^{-x}\cdot\ln(x+1)\cdot f(x)$，$x>-1$，且 $h'(x)=\left[\frac{f(x)}{x+1}+\ln(x+1)\cdot f'(x)-\ln(x+1)\cdot f(x)\right]e^{-x}\geqslant 0$，于是

$h(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，注意到$h(4)=e^{-4}\cdot\ln 5\cdot f(4)=1$，不等式$\ln(x+3)f(x+2)\geqslant e^{x+2}$，等价于$e^{-(x+2)}\cdot\ln(x+3)f(x+2)\geqslant 1$，即$h(x+2)\geqslant h(4)$，解出$x\geqslant 2$，故选 A.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.【答案】AB

【解析】对于 A 选项，$\frac{\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}=\frac{1}{\tan\theta+2}=\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$，故 A 选项正确；

对于 B 选项，$\tan\left(\theta-\frac{5\pi}{4}\right)=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{3-1}{1+3}=\frac{1}{2}$，故 B 选项正确；

对于 C 选项，$\sin^2\theta+\frac{1}{10}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}+\frac{1}{10}=\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}+\frac{1}{10}=\frac{3^2}{3^2+1}+\frac{1}{10}=1$，故 C 选项错误；

对于 D 选项，$\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{3}$，故 D 选项错误. 故选 AB.

10.【答案】AD

【解析】对于 A 选项，$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间的一组基底，且$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}$不共面，所以$\{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\}$也是空间的一组基底，故 A 项正确；

对于 B 选项，因为$\boldsymbol{a}=(4,-2,9)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,2)$，所以$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{4-4+18}{1+4+4}\cdot(1,2,2)=(2,4,4)$，故 B 项错误；

对于 C 选项，若A,C,D共线，而B不在直线上，此时不存在实数x,y，使得$\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AD}$，故 C 项错误；

对于 D 选项，由条件可知$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,-1,2)$，则$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{2-1}{\sqrt{2}\times 3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，故 D 项正确. 故选 AD.

11.【答案】BCD

【解析】对于 A 选项，由于$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=1$，对前$n-1$个等式求和，可得$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}+\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_{n-2}}{n-2}+\cdots+\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=n-1$，即$\frac{a_n}{n}-1=n-1$，解出$a_n=n^2$，$n\geqslant 2$，显然$a_1=1$也满足通项公式，故 A 选项错误；

对于 B 选项，因为$a_n=n^2$，所以$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$的前 10 项和为$1+2+3+\cdots+10=55$，故 B 选项正确；

对于 C 选项，当$n\geqslant 2$时，$b_n-b_{n-1}=n^3-(n-1)^3=3a_n-3n+1$，故 C 选项正确；

对于 D 选项，利用选项 C 的结论，可以得到$b_n-b_{n-1}+b_{n-1}-b_{n-2}+\cdots+b_2-b_1=3(2^2+3^2+\cdots+n^2)-3(2+\cdots+n)+(n-1)=3(S_n-1)-3\left[\frac{n(1+n)}{2}-1\right]+n-1=3S_n-\frac{3n^2+n}{2}-1=b_n-1=n^3-1$，$n\geqslant 2$，因此解出$S_n=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$，$n\geqslant 2$，显然$S_1=1$也满足式子，故 D 选项正确. 故选 BCD.

12.【答案】ABD

【解析】对于 A 选项，由$f'(x)=3x^2(3\ln x-1)+x^3\times\frac{3}{x}=9x^2\ln x$，令$f'(x)=0$，有$x=1$，可得函数$f(x)$的减区间为$(0,1)$，增区间为$(1,+\infty)$，可得$f(x)_{\min}=f(1)=-1$，故 A 选项正确；

对于 B 选项，由$f'(m)=9m^2\ln m=9e^2$，当$0<m<1$时，$m^2\ln m<0$，当$m>1$时，$y=m^2\ln m$单调递增，$f'(m)=9e^2$有唯一解$m=e$，有$f(m)=f(e)=2e^3$，故 B 选项正确；

对于 C 选项，当$x\in(0,1)$时，$g(x)=f(x)-a<0$，当$x>1$时，$g(x)$单调递增，$g(x)=0$至多有一个解，故 C 选项错误；

对于 D 选项，由$\log_2 3=\frac{1}{2}\log_2 9>\frac{1}{2}\log_2 8=\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}-\ln\left(\frac{3e}{2}\right)=\frac{3}{2}-\left(\ln\frac{3}{2}+1\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\ln e-\ln\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(\ln e-\ln\frac{9}{4}\right)>0$，有$1<\ln\left(\frac{3e}{2}\right)<\frac{3}{2}<\log_2 3$，又由函数$f(x)$的增区间为$(1,+\infty)$，有

$f\left(\ln\left(\frac{3e}{2}\right)\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f(\log_2 3)$，故D选项正确．故选ABD．

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

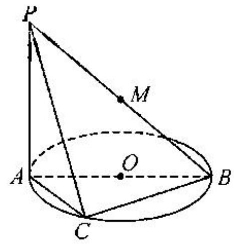
13.【答案】$\exists x\in \mathbf{R},x^2\leqslant 1$

【解析】命题"$\forall x\in \mathbf{R},x^2>1$"的否定是"$\exists x\in \mathbf{R},x^2\leqslant 1$"．

14.【答案】1

【解析】由于 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$，即 $\frac{x^2\cdot 2^x}{4^{ax}+1}=\frac{x^2\cdot 2^{-x}}{4^{-ax}+1}$，因此 $\frac{x^2\cdot 2^x}{4^{ax}+1}=\frac{x^2\cdot 2^{-x}\cdot 4^{ax}}{1+4^{ax}}$，则 $\frac{x^2\cdot 2^x}{4^{ax}+1}=\frac{x^2\cdot 2^{(2a-1)x}}{4^{ax}+1}$，解出 $a=1$．

15.【答案】5



【解析】如图，由 $AC\perp BC$，$AP\perp BC$，$AC\cap AP=A$，可得 $BC\perp$ 平面 PAC，可得 $BC\perp PC$，又由 $AP\perp AB$，可得 BP 的中点 M 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，$BP^2=AB^2+AP^2$，解得 $BP=10$，因此 $PM=5$，故三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径为5．

16.【答案】$\left(\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$

【解析】由图象对称性可知，函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴正半轴第一个交点的横坐标为 $\frac{\pi}{6}$，由图可知 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为其对称轴，则 $\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解出 $\omega=1$，由于 $A\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=0$，故 $\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，于是 $f(x)=A\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，由于 $f(0)=A\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，故 $A=1$，因此 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，易知 $f\left(-\frac{11}{6}\pi\right)=f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=0$，因为 $f(x)$ 在 $(-m,m)$ 上有且仅有两个零点，所以 $\frac{5\pi}{6}<m\leqslant\frac{7\pi}{6}$．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤．

17.【答案】(1) $A=\frac{\pi}{3}$　(2) $\triangle ACD$ 的面积为 $\sqrt{3}$

【解析】(1)由正弦定理有 $\frac{1}{2}\sin C\sin B=(\sin C-\sin A\cos B)\sin C$，…………1分

由 $\sin C\neq 0$，有 $\frac{1}{2}\sin B=\sin C-\sin A\cos B$，…………2分

又由 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，有 $\frac{1}{2}\sin B=\cos A\sin B$，…………3分

又由 $\sin B\neq 0$，有 $\cos A=\frac{1}{2}$，…………4分

又由 $A\in(0,\pi)$，可得 $A=\frac{\pi}{3}$；…………5分

(2)在 $\triangle ABC$ 中，利用余弦定理，$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AC\cdot AB}=\frac{1}{2}$，…………7分

将 $AC=2$，$BC=\sqrt{7}$ 代入，化简有 $AB^2-2AB-3=0$，

解出 $AB=3$ 或 $AB=-1$（舍去），由于 $AD=2DB$，则 $AD=2$，…………9分

因此$\triangle ACD$的面积为$\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. …………………………… 10分

18.【答案】(1)$a_n=n-\frac{1}{2}$ (2)$S_n=\frac{4n}{2n+1}$

【解析】(1)设等差数列的通项公式$a_n=a_1+d(n-1)$,

由于$a_{n+1}^2-a_n^2=2n$,令$n=1$,则$a_2^2-a_1^2=(a_1+d)^2-a_1^2=2$, …………………………… 2分

将$a_1=\frac{1}{2}$代入,解出$d=-2$或$d=1$,由于$\{a_n\}$各项为正数,则$d=1$, …………………………… 4分

因此$a_n=n-\frac{1}{2}$; …………………………… 6分

(2)由(1)知$b_n=\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, …………………………… 9分

$S_n=2\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{4n}{2n+1}$. …………………………… 12分

19.【答案】(1)略 (2)$\frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】(1)证明:如图,取AC的中点O,连接A_1O与AD相交于点E,

$\because$正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$,$\therefore AA_1\perp$底面ABC,又$\because OB\subset$平面ABC,$\therefore OB\perp AA_1$,

$\because O$为AC的中点,$AB=BC$,$\therefore OB\perp AC$,

$\because OB\perp AA_1$,$OB\perp AC$,$AA_1\cap AC=A$,AA_1,$AC\subset$平面AA_1C_1C,$\therefore OB\perp$平面AA_1C_1C.

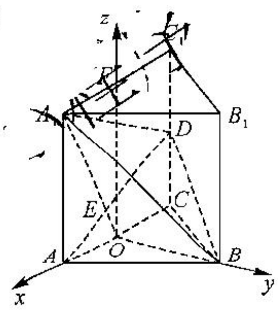
又$\because AD\subset$平面AA_1C_1C,$\therefore OB\perp AD$, …………………………… 2分

$\because AA_1=AC=2$,$AO=CD=1$,$\therefore \mathrm{Rt}\triangle A_1AO\cong\mathrm{Rt}\triangle ACD$,$\therefore\angle AA_1O=\angle CAD$,

$\therefore\angle AEO=\angle EAA_1+\angle AA_1E=\angle EAA_1+\angle OAE=\angle A_1AO=\frac{\pi}{2}$,$\therefore A_1O\perp AD$, …………………………… 4分

$\because A_1O\perp AD$,$OB\perp AD$,A_1O,$OB\subset$平面A_1OB,$A_1O\cap OB=O$,$\therefore AD\perp$平面A_1OB,

$\because A_1B\subset$平面A_1OB,$\therefore A_1B\perp AD$; …………………………… 6分



(2)取A_1C_1的中点F,连接OF,由OB、OF、OA两两垂直,分别以向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OF}$方向为x、y、z轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系,

有$A(1,0,0)$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$O(0,0,0)$,$A_1(1,0,2)$,$D(-1,0,1)$, …………………… 7分

设平面ABD的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

由$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AD}=(-2,0,1)$,有$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=-x+\sqrt{3}y=0,\\\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}=-2x+z=0.\end{cases}$

取$x=\sqrt{3}$,则$y=1$,$z=2\sqrt{3}$,可得$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,2\sqrt{3})$, …………………………… 9分

设平面A_1BD的法向量为$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,

由$\overrightarrow{A_1B}=(-1,\sqrt{3},-2)$,$\overrightarrow{A_1D}=(-2,0,-1)$,有$\begin{cases}\overrightarrow{A_1B}\cdot\boldsymbol{n}=-a+\sqrt{3}b-2c=0,\\\overrightarrow{A_1D}\cdot\boldsymbol{n}=-2a-c=0,\end{cases}$

取$a=1$,则$b=-\sqrt{3}$,$c=-2$,可得$\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-2)$, …………………………… 11分

由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-4\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{m}|=4$，$|\boldsymbol{n}|=2\sqrt{2}$，可得平面 ABD 与平面 A_1BD 的夹角的余弦值为 $\left|\dfrac{-4\sqrt{3}}{4\times2\sqrt{2}}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

…………………………………………………………………………………………………… 12 分

20.【答案】(1) $y=-x+1$ (2) $\dfrac{2}{\pi}$

【解析】(1)因为 $a=1$，所以 $f(x)=\sin x-x$，$f'(x)=\cos x-1$，………………………………………… 1 分

于是 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\dfrac{\pi}{2}$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$，……………………………………………………………… 2 分

则函数 $f(x)$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+1-\dfrac{\pi}{2}$，整理为 $y=-x+1$；……… 4 分

(2)因为 $f(x)\geqslant0$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，所以 $\dfrac{\sin x}{x}\geqslant a$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，……………………………… 5 分

设 $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $g'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，……………………………………………… 6 分

令 $y=x\cos x-\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $y'=-x\sin x<0$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，…………………………… 8 分

因此 $y=x\cos x-\sin x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，于是 $y=x\cos x-\sin x<0$，

因此 $g'(x)<0$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，$g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，则 $g(x)\geqslant g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$，…………… 11 分

由此可知，$a\leqslant\dfrac{2}{\pi}$，于是实数 a 的最大值为 $\dfrac{2}{\pi}$. …………………………………………………… 12 分

21.【答案】(1) $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-\dfrac{3}{2}$，$b_n=n$ (2) $S_n=8-(n+2)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ (3) 2

【解析】(1)因为 $2a_{n+1}=a_n-\dfrac{3}{2}$，所以 $a_{n+1}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{3}{2}\right)$，又 $a_1+\dfrac{3}{2}=2\neq0$，

因此 $\left\{a_n+\dfrac{3}{2}\right\}$ 是首项为 2，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列 ……………………………………………… 2 分

于是 $a_n+\dfrac{3}{2}=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，则 $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-\dfrac{3}{2}$；………………………………………………………… 3 分

因为数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n+b_{n+2}=2b_{n+1}$，所以数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，………………………………………… 4 分

由于 $b_1=2a_1=1$，$b_3=4a_1-a_3=2-(-1)=3$，公差 $d=\dfrac{b_3-b_1}{2}=1$，故 $b_n=1+(n-1)=n$；…………… 5 分

(2)由题意可知 $c_n=\left(a_n+\dfrac{3}{2}\right)\cdot b_n=n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

于是 $S_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+\cdots+n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$，则 $\dfrac{1}{2}S_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+\cdots+n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

两式错位相减得到 $\dfrac{1}{2}S_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=4-(n+2)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

因此 $S_n=8-(n+2)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$；…………………………………………………………………………… 8 分

(3)由(2)可知，$S_{n+1}-S_n=(n+2)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-(n+3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=(n+1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}>0$，

因此 $\{S_n\}$ 是单调递增数列，……………………………………………………………………………… 10 分

于是 $(S_n)_{\min}=S_1=8-(1+2)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-2}=2$，因此 $m\geqslant2$，则实数 m 的最小值为 2. ……………… 12 分

22.【答案】(1)略　(2)$(-\infty,1)$

【解析】(1)证明：因为 $a=1$，所以 $f(x)=e^{x-1}+\ln x-2x$，且知 $f'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x}-2$，…………………… 1 分

要证函数 $f(x)$ 单调递增，即证 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，…………………………………………… 2 分

设 $g(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x}-2,x>0$，则 $g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x^2}$，

注意 $y=e^{x-1}$，$y=-\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上均为增函数，故 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g'(1)=0$，…… 3 分

于是 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)\geqslant g(1)=0$，即 $f'(x)\geqslant 0$，

因此函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；…………………………………………………………………… 4 分

(2)由 $f'(x)=ae^{x-1}+\frac{1}{x}-a-1$，有 $f'(1)=0$，令 $h(x)=ae^{x-1}+\frac{1}{x}-a-1$，有 $h'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x^2}$，… 5 分

①当 $a\leqslant 0$ 时，$h'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x^2}<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，因此 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

注意到 $f'(1)=0$，故函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,1)$，减区间为 $(1,+\infty)$，

此时 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点；…………………………………………………………………… 7 分

②当 $a>0$ 时，$y=ae^{x-1}$ 与 $y=-\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上均为单调增函数，故 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，……
…………………………………………………………………………………………………… 8 分

注意到 $h'(1)=a-1$，若 $h'(1)<0$，即 $0<a<1$ 时，此时存在 $n\in(1,+\infty)$，使 $h'(n)=0$，

因此 $f'(x)$ 在 $(0,n)$ 上单调递减，在 $(n,+\infty)$ 上单调递增，又知 $f'(1)=0$，

则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,n)$ 上单调递减，此时 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点，……………… 9 分

若 $h'(1)>0$，即 $a>1$ 时，此时存在 $m\in(0,1)$，使 $h'(m)=0$，

因此 $f'(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递减，在 $(m,+\infty)$ 上单调递增，又知 $f'(1)=0$，

则 $f(x)$ 在 $(m,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，此时 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点．………… 10 分

当 $a=1$ 时，由(1)可知 $f(x)$ 单调递增，因此 $x=1$ 非极大值点，…………………………………………… 11 分

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1)$．…………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。