参照秘密级管理★启用前

试卷类型

2021级高三上学期期中校际联合考试

数学试题

202

考生注意：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本上无效。

3.考试结束，将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x|-3<x<1\}$，$B=\{x|-2<x\le 4\}$，则 $A\cup B=?$（　　）

A. $\{x|-3<x<-2\}$　　B. $\{x|-2<x<1\}$

C. $\{x|1<x<4\}$　　D. $\{x|-3<x\le 4\}$

2.已知复数 z 满足 $(z+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$，则 z 的共轭复数 $\overline{z}=$（　　）

A. $2+\mathrm{i}$　　B. $2-\mathrm{i}$　　C. $-2+\mathrm{i}$　　D. $-2-\mathrm{i}$

3.以点 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$ 为对称中心的函数是（　　）

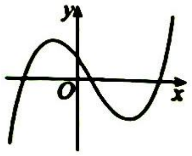
A. $y=\sin x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=\tan x$　　D. $y=|\tan x|$

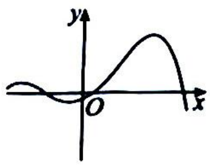
4.在 $\triangle ABC$ 中，点 M 是边 AC 上靠近点 A 的三等分点，点 N 是 BC 的中点，若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

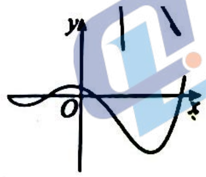
$x+y=$（　　）

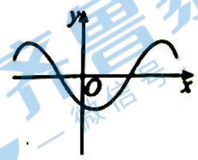
A.1　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D.-1

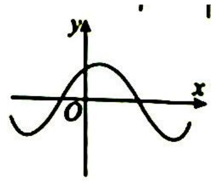
5.函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是（　　）




A.


B.

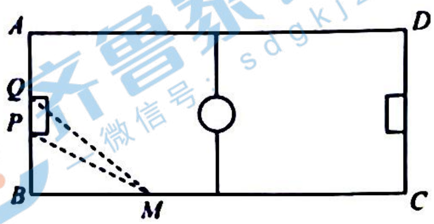

C.


D.

6.已知a_1，a_2，a_3，a_4，a_5成等比数列，且 2 和 8 为其中的两项，则a_5的最小值为（　　）

A.-64　　B.-16　　C. $\frac{1}{64}$　　D. $\frac{1}{16}$

7.在足球比赛中，球员在对方球门前的不同的位置起脚射门对球门的威胁是不同的，出球点对球门的张
大，射门的命中率就越高.如图为室内 5 人制足球场示意图，设球场（矩形）长BC为 40 米，宽AB为
球门长PQ为 4 米且$AQ=BP$.在某场比赛中有一位球员欲在边线BC上某点M处射门（假设球贴地直
行），为使得命中率最高，则BM大约为（　　）



A.8 米　　B.9 米　　C.10 米　　D.11 米

8.已知正方体每条棱所在直线与平面α所成角相等，平面α截此正方体所得截面边数最多时，截面的面
S，周长为l，则（　　）

A. S不为定值，l为定值　　B. S为定值，l不为定值

C. S与l均为定值　　D. S与l均不为定值

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中

A.若$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则$\alpha\parallel\beta$　　B.若$m\perp\alpha$，$m\parallel\beta$，则$\alpha\perp\beta$

C.若$m\parallel\alpha$，$n\perp\alpha$，则$m\perp n$　　D.若$\alpha\parallel\beta$，$m\parallel\alpha$，$n\subset\beta$，则$m\parallel n$

10.下列说法正确的是（　　）

A."$a>b$"是"$a^2>b^2$"的既不充分也不必要条件

B. $y=\log_2\left(-x^2+\frac{1}{4}\right)$的最大值为-2

C.若$\cos^2\alpha+\sin^2\beta=1$，则$\alpha=\beta$

D.命题"$\forall x\in(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}>1$"的否定是"$\forall x\in(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}\le 1$"

11.已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$和$g(x)$，$g'(x)$是$g(x)$的导函数且定义域为$\mathbf{R}$.若$g(x)$为偶函

$f(x)+g'(x)-5=0$，$f(x)-g'(4-x)-5=0$，则下列选项正确的是（　　）

A. $f(4)=5$　　B. $g'(-4)=1$

C. $f(1)+f(3)=10$　　D. $g'(-2)+f(2)=10$

12.已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，M，N分别为AB，CC_1的中点，P为正方体的内切球

任意一点，则（　　）

A.球O被MN截得的弦长为$\sqrt{2}$

B. $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的范围为$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

C. AP与A_1C_1所成角的范围是$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

D.球O被四面体ACB_1D_1表面截得的截面面积为$\frac{8}{3}\pi$

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$的二项展开式中常数项为________.

14.已知向量$\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{n}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$，其中$|\vec{a}|=3\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=5$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=135°$，若$\vec{m}\perp\vec{n}$，则实数$\lambda$的

程"）."冰雹猜想"可表示为数列$\{a_n\}$满足：$a_1=m$（m为正整数），$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2},a_n=2k\left(k\in\mathbf{N}_+\right)\\3a_n+1,a_n=2k+1\left(k\in\mathbf{N}\right)\end{cases}$

当$m=17$时，试确定使得$a_n=1$需要__________步"雹程"；若$a_6=1$，则m所有可能的取值所构成的

为______________.

16.已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}xe^{x-1}+1,x\geq 0\\x^2+1,x<0\end{cases}$，点$A$，$B$是函数$f\left(x\right)$图象上不同的两个点，则$\tan\angle AOB$（$O$

标原点）的取值范围是________.

四、解答题：共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2\left(a_n-1\right)$.

（1）求$\{a_n\}$；

（2）将$\{a_n\}$中满足$\log_4 a_m=k\left(k\in\mathbf{N}_+\right)$的第$m$项$a_m$取出，并按原顺序组成一个新的数列$\{b_n\}$，求$\{b_n\}$

前20项和T_{20}.

18.（12分）

设$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$c\cos A=\sqrt{2}a\sin B$，$c=\sqrt{2}b$.

（1）求A；

（2）设D是AB边上靠近A的三等分点，$CD=\sqrt{5}$，求$\triangle ABC$的面积.

19.（12分）

已知函数$f\left(x\right)=ax^4+bx^3$在$x=1$处取得极值-1.

（1）求a，b的值；

（2）若函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-mx$在区间$\left[-1,1\right]$上单调递增，求$m$的取值范围.

20.（12分）

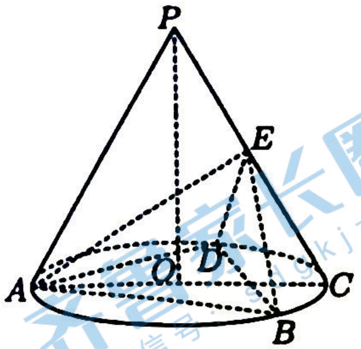
已知两个正项数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$\left(a_n-b_n\right)b_n=1$，$\frac{1}{a_n}=\frac{b_n}{n^2+1}$.

（1）求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

E 在母线 PC 上，且 $AB=AE=3$，$CE=\sqrt{3}$.

（1）求证：平面 $BED\perp$ 平面 ABD；

（2）若点 M 为线段 PO 上的动点，当直线 DM 与平面 ABE 所成角的正弦值最大时，求此时点 M 到 ABE 的距离.



22.（12 分）

已知函数 $f(x)=xe^{a-x}(x\in\mathbf{R})$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若方程 $e^2f(x+2)-x+2=0$ 的两根互为相反数.

①求实数 a 的值；

②若 $x_i>0$，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1(n\geq 2)$，证明：$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\leq\frac{1}{\sqrt[n]{e}}$.

2021 级高三上学期期中校际联合考试

数学试题答案

20

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中有一项是符合题目要求的。

1-4DACB　5-8DBCA

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中多项符合题目要求的，全部选对得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.BC　10.AB　11.AC　12.ABD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.解：（1）因为数列$\{a_n\}$满足$S_n=2(a_n-1)$①，

当$n=1$时，$a_1=2(a_1-1)$，解得$a_1=2$；

当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=2(a_{n-1}-1)$，②

①-②得$a_n=2(a_n-1)-2(a_{n-1}-1)$，即$a_n=2a_{n-1}$

因$a_1=2$，所以$a_n>0$，从而$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，

所以数列$\{a_n\}$是以$a_1=2$为首项，$q=2$为公比的等比数列.

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^n$.故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$.

（2）根据题意可知$\log_4 2^m=k$，

故$m=2k$，$k\in\mathbf{N}_+$.

所以$\{a_n\}$取出的项就是原数列的偶数项，所以$\{b_n\}$是以 4 为首项，4 为公比的等比数列，

所以$T_{20}=\frac{4\times(1-4^{20})}{1-4}=\frac{4}{3}(4^{20}-1)$.

18.解：（1）在$\triangle ABC$中，由$c\cos A=\sqrt{2}a\sin B$，$c=\sqrt{2}b$得：$b\cos A=a\sin B$，

由正弦定理得$\sin B\cos A=\sin A\sin B$，

而$0<B<\pi$，即$\sin B>0$，则$\tan A=1$，

又$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{4}$.

（2）依题意，$AD=\frac{1}{3}AB=\frac{\sqrt{2}}{3}b$，

在$\triangle ACD$中，由余弦定理得：$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos A$，

即$5=b^2+\frac{2}{9}b^2-2b\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}b\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{9}b^2$，解得$b=3$，

所以$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}b^2\sin\frac{\pi}{4}=\frac{9}{}$

因为$f(x)=ax^4+bx^3$在$x=1$处取得极值-1，所以$f(1)=a+b=-1$，$f'(1)=4a+3b=0$，

解得$a=3$，$b=-4$，

即$f(x)=3x^4-4x^3$，$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$，

当$x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，

当$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

即$f(x)=3x^4-4x^3$在$x=1$处取得极小值-1，符合题意，故$a=3$，$b=-4$.

（2）$g'(x)=f'(x)-m=12x^3-12x^2-m\ge 0$在$[-1,1]$上恒成立，

即$m\le 12x^3-12x^2$在$x\in[-1,1]$内恒成立.

令$h(x)=12x^3-12x^2$，$x\in[-1,1]$，则$h'(x)=12x(3x-2)$，令$h'(x)>0$，得$-1<x<0$或$\frac{2}{3}<x<1$

令$h'(x)<0$，得$0<x<\frac{2}{3}$，所以$h(x)$在$(-1,0)$和$\left(\frac{2}{3},1\right)$上单调递增，在$\left(0,\frac{2}{3}\right)$上单调递减，

因为$h(-1)=-24$，$h\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{16}{9}$，所以$h(x)_{\min}=-24$，

所以$m\le -24$，经验证$m=-24$符合题意，即m的取值范围为$(-\infty,-24]$.

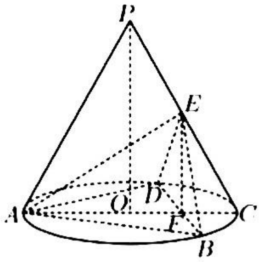
20.解：（1）由$\frac{1}{a_n}=\frac{b_n}{n^2+1}$，得$a_nb_n=n^2+1$，由$(a_n-b_n)b_n=1$，得$a_nb_n=1+b_n^2$，$\therefore b_n^2=n^2$，因为是正项数列，$\therefore b_n=n$，$\therefore a_n=\frac{n^2+1}{b_n}=n+\frac{1}{n}$；

（2）$[a_n+a_{n+1}]=\left[n+\frac{1}{n}+n+1+\frac{1}{n+1}\right]=\left[2n+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right]=\begin{cases}4,n=1\\2n+1,n\ge 2\end{cases}$，

所以$c_n=[a_n+a_{n+1}]+b_n=\begin{cases}5,n=1\\3n+1,n\ge 2\end{cases}$，所以当$n\ge 2$

$$S_n=5+7+10+\cdots+(3n+1)=5+\frac{(7+3n+1)(n-1)}{2}=\frac{1}{2}(3n^2+5n+2)$$

当$n=1$时，$S_1=5$满足$S_n=\frac{1}{2}(3n^2+5n+2)$，所以$S_n=\frac{1}{2}(3n^2+5n+2)$



因为 $AC\subset$ 平面 ABD，所以 $PO\perp AC$，

又因为 $\triangle ABD$ 是底面圆的内接正三角形，由 $AD=3$，可得 $AF=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{AD}{\sin 60^\circ}=AC$，

解得 $AC=2\sqrt{3}$，又 $AE=3$，$CE=\sqrt{3}$，

所以 $AC^2=AE^2+CE^2$，即 $\angle AEC=90^\circ$，$AE\perp PC$，

所以在 $Rt\triangle AEC$ 中，$\cos\angle EAC=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

在 $\triangle AEF$ 中，由余弦定理：

$$EF^2=AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cdot\cos\angle EAF=9+\frac{27}{4}-2\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4},$$

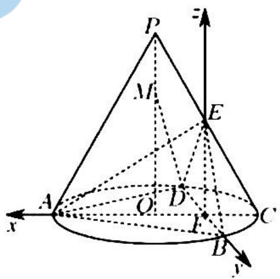
所以 $EF^2+AF^2=AE^2$，故 $EF\perp AC$.

因为 $PO\perp$ 底面 ABD，$PO\subset$ 面 PAC 所以平面 $PAC\perp$ 平面 ABD，

又 $EF\subset$ 面 PAC，$AC=$ 面 $PAC\cap$ 面 ABD，$EF\perp AC$，故 $EF\perp$ 面 ABD，

又 $EF\subset$ 平面 BED，所以平面 $BED\perp$ 平面 ABD；

（2）易知 $PO=2EF=3$，以点 F 为坐标原点，FA，FB，FE 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建图所示的空间直角坐标系，



所以$\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{DO}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{OP}=(0,0,3)$，

设平面ABE的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}z=0\end{cases}$，令$x=1$，则$\vec{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

设$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OP}(0\le\lambda\le1)$，可得$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},3\lambda\right)$，

设直线DM与平面ABE所成的角为θ，则$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{DM}\right\rangle\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{DM}\right|}=\frac{\left|3\sqrt{3}\lambda+2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{7}\times\sqrt{9\lambda^2+3}}$，

即$\sin^2\theta=\frac{9\lambda^2+12\lambda+4}{7(3\lambda^2+1)}=\frac{1}{7}\left(3+\frac{12\lambda+1}{3\lambda^2+1}\right)$，令$y=\frac{12x+1}{3x^2+1}$，$x\in[0,1]$，

则$y=\frac{12x+1}{3x^2+1}=4\left(\frac{x+\frac{1}{12}}{x^2+\frac{1}{3}}\right)=4\left[\frac{x+\frac{1}{12}}{\left(x+\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\right)^2+\frac{1}{3}}\right]=\frac{4}{x+\frac{1}{12}+\frac{\frac{49}{44}}{x+\frac{1}{12}}-\frac{1}{6}}$

$$\le\frac{4}{2\sqrt{\left(x+\frac{1}{12}\right)\left(\frac{\frac{49}{144}}{x+\frac{1}{12}}\right)}-\frac{1}{6}}=4$$

当且仅当$x=\frac{1}{2}$时，等号成立，所以当$x=\frac{1}{2}$时，$y=\frac{12x+1}{3x^2+1}$有最大值 4，

即当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$\sin\theta$的最大值为 1，此时点$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{MA}=\left(\sqrt{3},0,-\frac{3}{2}\right)$，

所以点M到平面ABE的距离$d=\frac{\left|\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|\left(\sqrt{3},0,-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(1,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\right|}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$，

22.（1）解：根据题意可得：$f'(x)=(1-x)\cdot e^{a-x}(x\in\mathbf{R})$.

令 $f'(x)>0$，得 $x\in(-\infty,1)$，令 $f'(x)<0$，得 $x\in(1,+\infty)$，

故函数 $f(x)$ 的增区间是 $(-\infty,1)$，减区间是 $(1,+\infty)$.

（2）①解析：根据题意得：$e^2f(x+2)-x+2=0$，$e^2(x+2)e^{a-x-2}-x+2=0$，

即 $(x+2)e^{a-x}-x+2=0$，$e^a(x+2)-e^x(x-2)=0$，

设方程 $e^2f(x+2)-x+2=0$ 的两根分别是 x_0 和 $-x_0$，故

$e^a(x_0+2)-e^{x_0}(x_0-2)=0$ ①

$e^a(-x_0+2)-e^{-x_0}(-x_0-2)=0$，即 $e^ae^{x_0}(-x_0+2)+(x_0+2)=0$ ②

①-②可得：$(e^a-1)\left[x_0+2+(x_0-2)e^{x_0}\right]=0$ ③

令 $g(x)=x+2+(x-2)e^x$，则 $g'(x)=1+e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x+1$

易证 $g'(x)\geq 0$，所以 $g(x)$ 单调递增，又 $g(0)=0$，所以当且仅当 $x=0$ 时，$g(x)=0$；

所以，若 $x_0=0$ 时，由①式可知：$e^a=-1$，不可能成立；

故 $x_0\neq 0$，即 $g(x_0)\neq 0$，由③式可知：$e^a-1=0$，可得 $a=0$；

（2）因为 $a=0$，可得 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，

设 $f(x)$ 在 $x=m(0<m<1)$ 处的切线斜率为 k，则 $k=f'(m)=\dfrac{1-m}{e^m}$，

又 $f(m)=\dfrac{m}{e^m}$，则 $f(x)$ 在 $x=m$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1-m}{e^m}x+\dfrac{m^2}{e^m}$，

设 $p(x)=\dfrac{1-m}{e^m}x+\dfrac{m^2}{e^m}-\dfrac{x}{e^x}$，$0<x\leq 1$，则 $p'(x)=\dfrac{1-m}{e^m}-\dfrac{1-x}{e^x}$，且 $p'(m)=0$，

设 $q(x)=\dfrac{1-m}{e^m}-\dfrac{1-x}{e^x}$，则 $q'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}$，

又 $0<x\leq 1$，则 $q'(x)>0$，所以 $q(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，且 $q(m)=0$，

则当 $0<x<m$ 时，$p'(x)=q(x)<0$；

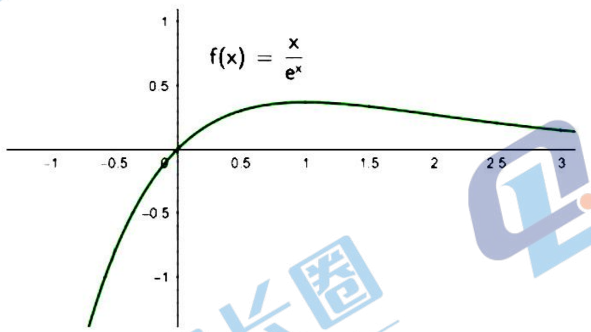
则 $p(x)\ge p(m)=0$，即 $\dfrac{1-m}{\mathrm{e}^m}x+\dfrac{m^2}{\mathrm{e}^m}\ge\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$，$0<x\le 1$，（切线放缩）

分别令 $x=x_1,x_2,\cdots x_n$，且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$，$x_i>0$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)=\dfrac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}+\dfrac{x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}+\cdots+\dfrac{x_n}{\mathrm{e}^{x_n}}\le\dfrac{1-m}{\mathrm{e}^m}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\dfrac{nm^2}{\mathrm{e}^m}=\dfrac{(1-m)}{\mathrm{e}^m}+\dfrac{nm^2}{\mathrm{e}^m}$

令 $m=\dfrac{1}{n}$，则 $\dfrac{(1-m)}{\mathrm{e}^m}+\dfrac{nm^2}{\mathrm{e}^m}=\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}+\dfrac{\dfrac{1}{n}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{e}}}$，

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\le\dfrac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{e}}}$.



关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索