

保密★启用前

2023—2024 学年度第一学期期中考试

# 高三数学试题 (A)

2023.11

注意事项:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分. 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 答题前, 考生务必将姓名、班级等个人信息填写在答题卡指定位置.
3. 考生作答时, 请将答案答在答题卡上. 选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答. 超出答题区域书写的答案无效, 在试题卷、草稿纸上作答无效.

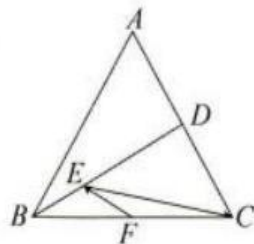
一、单项选择题: 本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $M = \{x | e^{x-1} > 1\}$ ,  $N = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ , 则  $M \cup N =$   
A.  $(0, 1)$                       B.  $(1, 2)$                       C.  $(1, 3)$                       D.  $(-1, +\infty)$
2. 王昌龄是盛唐著名的边塞诗人, 被誉为“七绝圣手”, 其《出塞》传诵至今, “秦时明月汉时关, 万里长征人未还. 但使龙城飞将在, 不教胡马度阴山”, 由此推断, 其中最后一句“不教胡马度阴山”是“但使龙城飞将在”的  
A. 必要条件                      B. 充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分又不必要条件
3. 设  $M = 5a^2 - a + 1$ ,  $N = 4a^2 + a - 1$ , 则  $M, N$  的大小关系为  
A.  $M > N$                       B.  $M < N$                       C.  $M = N$                       D. 大小关系不确定
4. 甲、乙两人同时于上周和本周到同一加油站给汽车加油两次, 甲每次加油 20 升, 乙每次加油 200 元, 若上周与本周油价不同, 则在这两次加油中, 平均价格较低的是  
A. 甲                                  B. 乙                                  C. 一样低                      D. 不能确定
5. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(2-x)$ , 当  $1 \leq x < 2$  时,  $f(x) = \log_2(x+2)$ , 则  $f(2024) =$   
A. 0                                  B. 2                                  C. -3                              D. 3

6. 若  $\tan \theta = 2$ , 则  $\frac{\sin \theta (1 + \sin 2\theta)}{\sqrt{2} \cos \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right)} =$   
A.  $\frac{2}{5}$                                   B.  $-\frac{2}{5}$                               C.  $\frac{6}{5}$                                   D.  $-\frac{6}{5}$

7. 如图, 在边长为 2 的等边  $\triangle ABC$  中, 点  $E$  为中线  $BD$  的三等分点 (接近点  $B$ ), 点  $F$  为  $BC$  的中点, 则  $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{EC} =$

- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{16}$                               B.  $-\frac{5}{6}$   
C.  $-\frac{10}{3}$                               D.  $-\frac{3}{4}$



高三数学试题 (A) 第 1 页 (共 4 页)

8. 某景区为提升游客观赏体验, 搭建一批圆锥形屋顶的小屋(如图1). 现测量其中一个屋顶, 得到圆锥 $SO$ 的底面直径 $AB$ 长为12m, 母线 $SA$ 长为18m(如图2). 若 $C$ 是母线 $SA$ 的一个三等分点(靠近点 $S$ ), 从点 $A$ 到点 $C$ 绕屋顶侧面一周安装灯光带, 则灯光带的最小长度为



图1

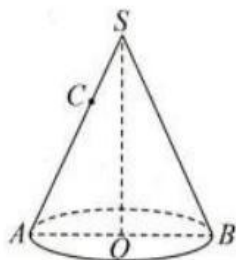


图2

- A.  $6\sqrt{7}$ m      B. 16m      C.  $6\sqrt{13}$ m      D. 12m

二、多项选择题: 本大题共4个小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得5分, 选对但不全的得2分, 有选错的得0分.

9. 当两个集合中有一个集合为另一集合的子集时称这两个集合之间构成“全食”, 当两个集合有公共元素, 但互不为对方子集时称这两集合之间构成“偏食”. 对于集合

$$A = \left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}, B = \{x | ax^2 = 1, a \geq 0\}$$

若 $A$ 与 $B$ 构成“全食”或构成“偏食”, 则 $a$ 的取值可以是

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 4

10. 已知不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ , 则下列结论正确的是

A.  $a < 0$

B.  $a + b + c > 0$

C.  $c < 0$

D.  $cx^2 - bx + a < 0$ 的解集为 $\{x | x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > 1\}$

11. 已知函数 $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x (n \in \mathbb{N}^*)$ , 则下列结论正确的有

A. 点 $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ 为函数 $f_3(x)$ 图象的一个对称中心

B.  $f_4(x)$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

C.  $f_6(x)$ 的一个单调递增区间为 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$

D.  $f_8(x)$ 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称

12. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 其导函数为 $f'(x)$ , 且 $f(1-x) - f(1+x) + 2x = 0$ 恒成立, 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调递增, 则

A.  $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减

B.  $f(0) = 0$

C.  $f(2022) = 2022$

D.  $f'(2023) = 2$

高三数学试题(A)第2页(共4页)

三、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若命题“存在  $x \in \mathbf{R}$ , 使  $2x^2 + 5x - m = 0$ ”是真命题, 则实数  $m$  的一个可能取值为\_\_\_\_\_.

14. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 若函数  $y = e^x + ax$  有大于零的极值点, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 黄金比又称黄金律, 是指事物各部分间一定的数学比例关系, 即将整体一分为二, 较小部分与较大部分之比等于较大部分与整体之比, 其比值为  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ , 上述比例又被称为黄金分割. 将底和腰之比等于  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  的等腰三角形称为黄金三角形, 若某黄金三角形的一个底角为  $C$ , 则  $\cos 2C =$ \_\_\_\_\_.

16. 已知向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角为  $\frac{\pi}{4}$ ,  $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$ , 若对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 恒有  $|\mathbf{b} + x\mathbf{a}| \geq \left| \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} \right|$ , 则函数  $f(t) = |t\mathbf{b} - \mathbf{a}| + \left| t\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} \right| (t \in \mathbf{R})$  的最小值为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知  $p$ : 实数  $x$  满足  $x^2 - 10x + 16 \leq 0$ ,  $q$ : 实数  $x$  满足  $x^2 - 4mx + 3m^2 \leq 0$  (其中  $m > 0$ ).

(1) 若  $m = 1$ , 且  $p$  和  $q$  至少有一个为真, 求实数  $x$  的取值范围;

(2) 若  $q$  是  $p$  的充分不必要条件, 求实数  $m$  的取值范围.

18. (12 分) 已知函数  $f(x) = x^2 - 2ax + a$ .

(1) 若  $f(x) \geq 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 当  $a \neq -3$  时, 解关于  $x$  的不等式  $f(x) > 4a - (a+3)x$ .

19. (12 分) 已知  $\mathbf{a} = (2\cos x, 2\sin x)$ ,  $\mathbf{b} = \left( \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \right)$ , 函数  $f(x) = \cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ .

(1) 求函数  $y = f(x)$  的单调区间;

(2) 若锐角  $\triangle ABC$  的三内角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 且  $f(A) = 1$ , 求  $\frac{b+c}{a}$  的取值范围.

20. (12分) 用数学的眼光看世界就能发现很多数学之“美”. 现代建筑讲究线条感, 曲线之美让人称奇. 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率, 曲线的曲率定义如下: 若  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数,  $f''(x)$  是  $f'(x)$  的导函数, 则曲线  $y=f(x)$  在点  $(x, f(x))$  处的曲率

$$K = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + [f'(x)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$



- (1) 若曲线  $f(x) = \ln x + x$  与  $g(x) = \sqrt{x}$  在  $(1, 1)$  处的曲率分别为  $K_1, K_2$ , 比较  $K_1, K_2$  大小;  
(2) 求正弦曲线  $h(x) = \sin x (x \in \mathbb{R})$  曲率的最大值.

21. (12分) 对 1 个单位质量的含污物体进行清洗, 清洗前其清洁度 (含污物体的清洁度定义为:

$1 - \frac{\text{污物质量}}{\text{物体质量(含污物)}}$ ) 为 0.8, 要求洗完后的清洁度是 0.99. 有两种方案可供选择, 方案甲: 一次清洗; 方案乙: 两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响, 其质量的变化量为  $a (1 \leq a \leq 3)$ . 设用  $x$  单位质量的水初次清洗后的清洁度是  $\frac{x+0.8}{x+1} (x > a-1)$ , 用  $y$  单位质量的水第二次清洗后的清洁度是  $\frac{y+ac}{y+a}$ , 其中  $c (0.8 < c < 0.99)$  是该物体初次清洗后的清洁度.

- (1) 分别求出方案甲以及  $c = 0.95$  时方案乙的用水量, 并比较哪一种方案用水量较少;  
(2) 若采用方案乙, 当  $a$  为某定值时, 如何安排初次与第二次清洗的用水量, 使总用水量最少? 并讨论  $a$  取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

22. (12分) 已知函数  $f(x) = 2 \ln x - (a+1)x^2 - 2ax + 1, a \in \mathbb{R}$ .

- (1) 当  $a=1$  时, 求函数  $f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;  
(2) 已知函数  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$ , ①求实数  $a$  的取值范围; ②证明:  $x_1 + x_2 > \frac{2}{a+1}$ .

### 高三数学试题 (A) 参考答案

一、单项选择题: 本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. D 2. A 3. A 4. B 5. A 6. C 7. B 8. C

二、多项选择题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. ABD 10. AB 11. ABD 12. BC

三、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.  $-\frac{25}{8}$  (答案不唯一) 14.  $(-\infty, -1)$  15.  $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$  16.  $\sqrt{5}$

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

解: (1)  $p$ : 实数  $x$  满足  $x^2 - 10x + 16 \leq 0$ , 解得  $2 \leq x \leq 8$ , ..... 2 分

当  $m=1$  时,  $q$ :  $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ , 解得  $1 \leq x \leq 3$ , ..... 3 分

因为  $p$  和  $q$  至少有一个为真, 所以  $2 \leq x \leq 8$  或  $1 \leq x \leq 3$ , 所以  $1 \leq x \leq 8$ ,

所以实数  $x$  的取值范围为  $[1, 8]$ ; ..... 5 分

(2) 因为  $m > 0$ , 由  $x^2 - 4mx + 3m^2 \leq 0$ , 解得  $m \leq x \leq 3m$ , 即  $q$ :  $m \leq x \leq 3m$ , ..... 7 分

因为  $q$  是  $p$  的充分不必要条件,

所以  $\begin{cases} m \geq 2 \\ 3m \leq 8 \end{cases}$  (等号不同时取), 所以  $2 \leq m \leq \frac{8}{3}$ . ..... 10 分

18. (12 分)

解: (1) 由题意知  $x^2 - 2ax + a \geq 0$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立, 所以  $\Delta = 4a^2 - 4a \leq 0$ , 解得  $0 \leq a \leq 1$ ,

即实数  $a$  的取值范围为  $[0, 1]$ ; ..... 4 分

(2) 由  $f(x) > 4a - (a+3)x$  得:  $x^2 + (3-a)x - 3a = (x+3)(x-a) > 0$ ; ..... 6 分

当  $a > -3$  时,  $(x+3)(x-a) > 0$  的解为  $x < -3$  或  $x > a$ ; ..... 8 分

当  $a < -3$  时,  $(x+3)(x-a) > 0$  的解为  $x < a$  或  $x > -3$ ; ..... 10 分

综上所述: 当  $a > -3$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, -3) \cup (a, +\infty)$ ; 当  $a < -3$  时, 不等式的解集为  $(-\infty, a) \cup (-3, +\infty)$ . ..... 12 分

19. (12分)

解: (1) 由题意得,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cos x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ,

$$|\vec{a}| = \sqrt{(2 \cos x)^2 + (2 \sin x)^2} = 2, |\vec{b}| = \sqrt{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = 1,$$

$$\text{所以 } f(x) = \cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}{2 \times 1} = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right). \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

对于函数  $y = f(x)$  的单调增区间, 令  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ,

$$\text{得到 } k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z});$$

对于函数  $y = f(x)$  的单调减区间, 令  $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ,

$$\text{得到 } k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbf{Z});$$

所以函数  $y = f(x)$  的单调增区间为  $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$ ,

函数  $y = f(x)$  的单调减区间为  $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$ ;  $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

(2)  $f(A) = \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ , 因为锐角  $\triangle ABC$  中,  $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

$$\text{所以 } 2A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right), \text{ 所以 } 2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } A = \frac{\pi}{3}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

在  $\triangle ABC$  中, 由正弦定理得

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{\sin B + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{3}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right),$$

$\dots\dots\dots 10 \text{分}$

$$\text{在锐角 } \triangle ABC \text{ 中, } \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < C = \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{3} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } \sqrt{3} < 2 \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2,$$

$$\text{即 } \frac{b+c}{a} \text{ 的取值范围为 } (\sqrt{3}, 2]. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

20. (12分)

解: (1)  $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ , 所以  $K_1 = \frac{|f''(1)|}{(1+[f'(1)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}}$ , ..... 3分

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $g''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ ,  $K_2 = \frac{|g''(1)|}{(1+[g'(1)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{4}}{[1+(\frac{1}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}$ , 所以  $K_1 < K_2$ ;

..... 6分

(2)  $h'(x) = \cos x$ ,  $h''(x) = -\sin x$ ,

所以  $K = \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$ ,

$K^2 = \frac{\sin^2 x}{(1+\cos^2 x)^3} = \frac{\sin^2 x}{(2-\sin^2 x)^3}$ , ..... 9分

令  $t = 2 - \sin^2 x$ , 则  $t \in [1, 2]$ ,  $K^2 = \frac{2-t}{t^3}$

设  $p(t) = \frac{2-t}{t^3}$ , 则  $p'(t) = \frac{-t^3 - 3t^2(2-t)}{t^6} = \frac{2t-6}{t^4}$ ,

显然当  $t \in [1, 2]$  时,  $p'(t) < 0$ ,  $p(t)$  递减, 所以  $p(t)_{\max} = p(1) = 1$ .  $K^2$  最大值为 1, 所以  $K$  的最大值为 1. .... 12分

21. (12分)

解: (1) 设方案甲与方案乙的用水量分别为  $x, z$ , 则由题意得

$\frac{x+0.8}{x+1} = 0.99$ , 解得  $x = 19$ , ..... 2分

由  $c = 0.95$  得方案乙初次用水量为 3, 第二次用水量  $y$  满足  $\frac{y+0.95a}{y+a} = 0.99$ ,

解得  $y = 4a$ , 所以  $z = 4a + 3$ , ..... 4分

即两种方案的用水量分别为 19 和  $4a + 3$ ,

因为  $1 \leq a \leq 3$  时,  $x - z = 19 - 4a - 3 = 4(4 - a) > 0$ ,

所以  $x > z$ , 所以方案乙的用水量较少; ..... 6分

(2) 设初次与第二次清洗的用水量分别为  $x$  与  $y$ ,

类似 (1) 得  $x = \frac{5c-4}{5(1-c)}$ ,  $y = a(99-100c)$ ,

所以  $x + y = \frac{5c-4}{5(1-c)} + a(99-100c)$

$= \frac{1}{5(1-c)} + 100a(1-c) - a - 1$ ,

当  $a$  为定值时,

$x + y \geq 2\sqrt{\frac{1}{5(1-c)} \cdot 100a(1-c)} - a - 1 = -a + 4\sqrt{5a} - 1$ ,

当且仅当  $\frac{1}{5(1-c)} = 100a(1-c)$  时取等号,

此时  $c = 1 + \frac{1}{10\sqrt{5a}}$  不合题意舍去, 或  $c = 1 - \frac{1}{10\sqrt{5a}} \in (0.8, 0.99)$ , ..... 9 分

将  $c = 1 - \frac{1}{10\sqrt{5a}}$  代入  $x = \frac{5c-4}{5(1-c)}$ ,  $y = a(99-100c)$ ,

得  $x = 2\sqrt{5a} - 1 > a - 1$ ,  $y = 2\sqrt{5a} - a$ ,

所以  $c = 1 - \frac{1}{10\sqrt{5a}}$  时总用水量最少,

此时第一次与第二次用水量分别为  $2\sqrt{5a} - 1$  和  $2\sqrt{5a} - a$ ,

最少用水量为  $T(a) = 2\sqrt{5a} - 1 + 2\sqrt{5a} - a = -a + 4\sqrt{5a} - 1$ ,

当  $1 \leq a \leq 3$  时,  $T'(a) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{a}} - 1 > 0$ , 所以  $T(a)$  在  $[1, 3]$  上为增函数,

所以随着  $a$  的增加, 最少用水量在增加. .... 12 分

22. (12 分)

解: (1) 当  $a = 1$  时,  $f(x) = 2\ln x - 2x^2 - 2x + 1$ ,  $f'(x) = \frac{2}{x} - 4x - 2$ , ..... 1 分

$f'(1) = 2 - 4 - 2 = -4$ ,  $f(1) = -2 - 2 + 1 = -3$ ,

所以函数  $f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y + 3 = -4(x - 1)$ , 即  $y = -4x + 1$ ;

..... 3 分

(2) ①函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 2(a+1)x - 2a = \frac{-2[(a+1)x-1](x+1)}{x}$$

当  $a \leq -1$  时,  $f'(x) > 0$  恒成立,  $f(x)$  单调递增, 所以  $f(x)$  不可能有 2 个零点;

..... 4 分

当  $a > -1$  时, 当  $0 < x < \frac{1}{a+1}$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增, ..... 5 分

当  $x > \frac{1}{a+1}$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,

当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ ,

所以要满足函数  $f(x)$  有 2 个零点, 只需  $f\left(\frac{1}{a+1}\right) > 0$ ,

$$\text{即 } 2\ln \frac{1}{a+1} - (a+1)\left(\frac{1}{a+1}\right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{a+1} + 1 > 0,$$

整理得  $2\ln(a+1) + \frac{a}{a+1} < 0$ , ..... 6 分

设  $g(x) = 2\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$ , 函数  $g(x)$  的定义域为  $(-1, +\infty)$ ,

$g'(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ , 所以  $g(x)$  在定义域上单调递增,

且  $g(0) = 0$ , 则不等式  $2\ln(a+1) + \frac{a}{a+1} < 0$  的解集为  $(-1, 0)$ ,

所以  $a$  的取值范围为  $(-1, 0)$ ; ..... 8 分

高三数学答案 (A) 第 4 页 (共 5 页)



②证明: 由(2)知,  $-1 < a < 0$ , 则  $\frac{1}{a+1} > 0$ ,  
 要证明  $x_1 + x_2 > \frac{2}{a+1}$ , 即证明  $x_1 > \frac{2}{a+1} - x_2$ ,  
 不妨设  $0 < x_1 < \frac{1}{a+1} < x_2$ ,  
 因为  $x_2 > \frac{1}{a+1}$ , 所以  $0 < \frac{2}{a+1} - x_2 < \frac{1}{a+1}$ ,  
 又  $0 < x_1 < \frac{1}{a+1}$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{a+1})$  上单调递增,  
 此时需证明  $f(x_1) > f(\frac{2}{a+1} - x_2)$ ,  
 当  $0 < x_1 < \frac{1}{a+1}$ ,  $0 < \frac{2}{a+1} - x_2 < \frac{1}{a+1}$  时,  
 可得  $\frac{1}{a+1} < x_2 < \frac{2}{a+1}$ , ..... 10分  
 因为  $f(x_1) = f(x_2)$ , 即证明  $f(x_2) - f(\frac{2}{a+1} - x_2) > 0$ ,  
 设  $h(x) = f(x) - f(\frac{2}{a+1} - x)$ , 函数的定义域为  $(\frac{1}{a+1}, +\infty)$ ,  

$$h'(x) = f'(x) + f'(\frac{2}{a+1} - x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{\frac{2}{a+1} - x} - 4(a+1)$$

$$= \frac{4}{(a+1) \cdot x \cdot (\frac{2}{a+1} - x)} - 4(a+1) > \frac{4}{(a+1) \cdot (\frac{1}{a+1})^2} - 4(a+1) = 0,$$
 所以  $h(x)$  在  $(\frac{1}{a+1}, +\infty)$  单调递增, 则  $h(x) > h(\frac{1}{a+1}) = 0$ ,  
 $h(x) = f(x) - f(\frac{2}{a+1} - x) > 0$ , 所以  $f(x_1) = f(x_2) > f(\frac{2}{a+1} - x_2)$ ,  
 又  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{a+1})$  上单调递增, 所以  $x_1 > \frac{2}{a+1} - x_2$ ,  
 即  $x_1 + x_2 > \frac{2}{a+1}$ , 命题得证. .... 12分

## 关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索