2024高三11月质量检测卷•数学

参考答案及解析

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	D	C	A	C	B	C	AB	BC	ABC	AC

1.D .

【解析】因为$M=\left\{x\mid\frac{x-1}{x+3}<0\right\}=-3<x<1$，$N=\left\{y\in R\mid y=\sqrt{x}+1\right\}=[1,+\infty)$，所以$(C_UM)\bigcap N=[1,+\infty)$

2.C .

【解析】因为A中，p不是q的充分条件，则q不是p的必要条件；B中，若一个三角形三边分别为5,6,9，另一三角形三边分别为6,6,8,,两个三角形周长相等，却不全等，则q不是p的必要条件；D中，若$x=\sqrt{2},x^2=2$，x^2不是无理数，p不是q的充分条件，则q不是p的必要条件

3.D .

【解析】应为扇形的弧长$l=2\times\frac{3}{\sin 1}$，$S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sin 1}\times\frac{6}{\sin 1}=\frac{9}{\sin^2 1}$

4.C .

【解析】因为$f(x-1)$为奇函数，则关于原点对称，所以$f(x)$关于点$(-1,0)$对称；因为$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减，则$f(x)$在R上单调递减；故，$f(-1)>f(3)$，$f(-3)>f(3)$，$f(-1)<f(-3)$.

5.A .

【解析】由题意得，$t=\sin(2\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$P(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})$，又因为$P$向左平移$s$个单位长度得到点$P'(\frac{\pi}{4}-s,\frac{\sqrt{2}}{2})$，代入得，$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos(\frac{\pi}{2}-2s)=\sin 2s$，

$s=\frac{\pi}{8}+k\pi$或$s=\frac{3\pi}{8}+k\pi$，因为$s>0$，所以s的最小值为$\frac{\pi}{8}$

6.C .

【解析】在ΔBDC和ΔADC中，由余弦定理可得$a^2=\frac{1}{4}c^2+2-2\times\frac{1}{2}c\times\sqrt{2}\times\cos\angle BDC$，

$b^2=\frac{1}{4}c^2+2-2\times\frac{1}{2}c\times\sqrt{2}\times\cos(\pi-\angle BDC)$；联立可得，$a^2+b^2=\frac{1}{2}c^2+4=7$，则

$c=\sqrt{6}$，$S_{\Delta BDC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\sin\angle BDC=\frac{\sqrt{3}}{2}$；得$\sin\angle BDC=1$，$\because 0<\angle BDC<\pi$，

$\therefore\angle BDC=\frac{\pi}{2}$，$\therefore b=\sqrt{AD^2+CD^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

7.B .

【解析】 已知$3f(x)\cos x+f'(x)\sin x<0$，令$g(x)=f(x)\sin^3 x$，则

$g'(x)=3f(x)\sin^2 x\cos x+f'(x)\sin^3 x=\sin^2 x[3f(x)\cos x+f'(x)\sin x]\le 0$，所以

$g(x)$在R上单调递减，又因为$f(x)$偶函数，所以$f(-\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{6})=-2$，

$f(-\frac{\pi}{6})=(-\frac{1}{2})^3 f(-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$，$g(x+\frac{\pi}{2})=f(x+\frac{\pi}{2})\sin^3(x+\frac{\pi}{2})=f(x+\frac{\pi}{2})\cos^3 x$，所以 $f(x+\frac{\pi}{2})\cos^3 x-\frac{1}{4}<0$ 等价于 $g(x+\frac{\pi}{2})<g(-\frac{\pi}{6})$，则 $x+\frac{\pi}{2}>-\frac{\pi}{6}$，解得 $x>-\frac{2\pi}{3}$，

所以不等式的解集为 $(-\frac{2\pi}{3},+\infty)$

8.C .

【解析】由 $y=f(3-2x)$ 为奇函数可得 $f(3-2x)=-f(3+2x)$，即 $f(3-x)=-f(3+x)$，

$\because f'(3-x)=f'(3+x),\therefore f'(3-x)-f'(3+x)=0$，即 $g(3-x)-g(3+x)=0$，所以函数 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=3$ 对称。由 $y=\frac{1}{3}x-f(x+2)$ 是偶函数可得

$y'=\frac{1}{3}-f'(x+2)$ 为奇函数，$\therefore \frac{1}{3}-f'(x+2)+\frac{1}{3}-f'(-x+2)=0$，即

$\therefore g(x+2)+g(-x+2)=\frac{2}{3}$，所以函数 $y=g(x)$ 的图像关于点 $(2,\frac{1}{3})$ 对称；将 $x=1$ 代入

$g(3-x)-g(3+x)=0$，得 $g(4)=\frac{1}{3}$，将 $x=2$ 代入 $g(x+2)+g(-x+2)=\frac{2}{3}$ 得

$g(4)+g(0)=\frac{2}{3}$ 得 $g(0)=\frac{1}{3}$，将 $x=3$ 代入 $g(3-x)-g(3+x)=0$，得 $g(0)-g(6)=0$，

故 $g(6)=\frac{1}{3}$

9 . AB

【解析】$\because A=\{x\,|\,x^2-2x-3=0,x\in R\},\therefore A=\{-1,3\}$，$\because A\cup B=A,\therefore B\subseteq A$

①当 $B=A$，即 $B=\{-1,3\}$ 时，得 $-\frac{2(a+1)}{a}=2,\ \frac{a-2}{a}=-3$；无解

②当 $B=\varnothing$，即 $\Delta=4(a+1)^2-4a(a-2)=16a+4<0\Rightarrow a<-\frac{1}{4}$

③当 $B=\{-1\}$，即 $16a+4=0,a-2a-2+a-2=0$；无解

④当 $B=\{3\}$，即 $16a+4=0,9a+6a+6+a-2=0\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$

故，a 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{1}{4}]$

10 .BC;

【解析】A选项中，只有 $\Delta=a^2-4\geq 0$，即 $a\leq -2$ 或 $a\geq 2$ 时，$x^2-ax+1=0$ 有实数解

B选项中，若 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b-a}$，则 $a^2-3ab+b^2=0$，因为 $b\neq 0$，所以 $(\frac{a}{b})^2-3\frac{a}{b}+1=0$

解得 $\frac{a}{b}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，令 $a=3+\sqrt{5},b=2$，则有 $ab>0$ 且 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b-a}$；

C选项中，正方形属于四边形；D选项中，三角形两边之差要小于第三边，故错误；

11 . ABC

【解析】$\because |x_1|<3,5=|x_1-x_2|\geq|x_2|-|x_1|>|x_2|-3,\therefore |x_2|<8$

$\therefore x_1x_2=\frac{1}{a},\therefore x_1x_2=|x_1x_2|<24,\therefore a>\frac{1}{24}$　又 $\because |x_1-x_2|=5,\therefore (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=25$，

$\therefore (b-1)^2=25a^2+4a>\dfrac{121}{576}, \therefore b>\dfrac{35}{24}$ 或 $b<\dfrac{11}{24}$

$\because x_1x_2=\dfrac{1}{a}>0, \therefore x_1,x_2$ 同号 $. \because |x_1|<3, \therefore -3<x_1<3$

若 $-3<x_1<0$，则 $-3<x_1<x_2<0$，则 $|x_1-x_2|<3$，与 $|x_1-x_2|=5$ 矛盾

$\therefore 0<x_1<3$，则 $x_2>5, \therefore x_1+x_2>0, \therefore x_1+x_2=-\dfrac{b-1}{a}>0, b<1$.所以 $b<\dfrac{11}{24}$

12 . AC ;

【解析】连接CG，且 $DH\perp AB$;由题可知：$\Delta AEC\cong\Delta BFC$,则 $CE=CF$,

$\because \angle ACE=\angle ECF=\angle BCF=30^\circ, \angle CAE=\angle EAD=\angle DAH=\angle CBF=\angle FBD=\angle DBH=15$

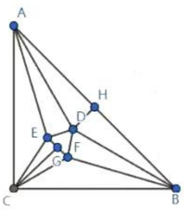
$\therefore \angle AED=\angle BFD=90^\circ, \therefore \Delta AED\cong\Delta AHD\cong\Delta BFD\cong\Delta BHD$ ；

$\therefore BF=BH=\dfrac{1}{2}AB, \because \Delta CGF\sim\Delta BFD, \dfrac{CG}{BF}=\dfrac{GF}{BF}=\dfrac{1}{2}$；设 $EF=DH=2x$,

$\therefore CG=x\tan 75^\circ=(2+\sqrt{3})x, \therefore BF=2(2+\sqrt{3})x, \therefore AB=4(2+\sqrt{3})x$,

$\because AC=2, \therefore 4(2+\sqrt{3})x=2\sqrt{2}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{3}}; \therefore EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$

$\therefore S_{\Delta DEF}=\dfrac{1}{2}\times\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}-12}{2}; S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)=4-2\sqrt{3}$



13 . ②③

【解析】① "$x\in P$" 是 "$x\in S$" 的充要条件，则 $2-m=-1, 3+m=5$，此方程无解，故不存在实数m，则不符合题意② "$x\in P$" 是 "$x\in S$" 的充分不必要条件时，$2-m\le -1, 3+2m\ge 5, 2-m\le 3+2m$；解得 $m\ge 3$，符合题意③ "$x\in P$" 是 "$x\in S$" 的必要不充分条件时，当 $S=\varnothing, 2-m>3+2m$，得 $m<\dfrac{1}{3}$；当 $S\ne\varnothing$，需满足 $2-m\le 3+2m, 2-m\ge -1, 3+2m\le 5$，解集为 $-\dfrac{1}{3}\le m\le 1$；综上所述，实数 m 的取值范围 $-\dfrac{1}{3}\le m<\dfrac{1}{3}$.

14 . $\{x\mid x\ge 5\}$;

【解析】 $A\cup B=\{x\mid x<5\}$，$C_U(A\cap B)=\{x\mid x\le -2$ 或 $x>3\}$

因为 $A\otimes B=\{x\mid x\notin A\cup B$ 且 $x\in C_U(A\cap B)\}$，所以 $A\otimes B=\{x\mid x\ge 5\}$

15 . $\dfrac{4}{3}$ ；

【解析】因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2})$ 是 R 上的奇函数，则

$f(-x)=-f(x)$，即 $\sin\varphi\cos\omega x=-\cos\omega x\sin\varphi$，又因为 $\omega>0$，所以 $\sin\varphi=0$，

因为 $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=0$；故 $f(x)=\sin\omega x$；又因为图象关于点 $A(\dfrac{3\pi}{4},0)$ 对称，

则 $\dfrac{3\omega\pi}{4}=k\pi,k\in N$；

$\omega=\dfrac{4k}{3},k\in N$，因为函数在区间 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上是单调函数，则 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{\omega}\ge\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 0<\omega\le 4$；

所以 $\omega=\dfrac{4}{3}$

16．①③;

【解析】①:因为函数 $y=x^3-1$ 的值域是全体实数集，所以对于任意 $x\in R$,存在 $y\in R$,使 $\dfrac{f(x)-f(y)}{2}=2$ 成立，符合题意

②: $y=e^x(x+1)\Rightarrow y'=e^x(x+2)$,当 $x>-2$ 时, $y'>0$,该函数此时单调递增,

当 $x<-2$ 时，$y'<0$ 该函数此时单调递减，所以当 $x=-2$ 时，函数有最小值 $-e^{-2}$

若 $y=e^x(x+1)$ 是“半差值”为2的函数，因此有 $\forall x\in R$,存在 $y\in R$,使 $\dfrac{f(x)-f(y)}{2}=2$ 成立，即 $f(x)=f(y)+4$,对于 $\forall x\in R$, $f(x)\ge -e^{-2}$,而 $f(y)+4\ge -e^{-2}+4$,显然 $\forall x\in R$,不一定存在 $y\in R$,使 $\dfrac{f(x)-f(y)}{2}=2$ 成立，故本函数不符合题意;

③:因为函数 $y=\log_2 x$ 的的值域是全体实数集，所以对于任意 $x\in R$,存在 $y\in R$,使 $\dfrac{f(x)-f(y)}{2}=2$ 成立，符合题意;

④:若 $y=\sin x$ 是实数集上的“半差值”为2的函数，因此有 $\forall x\in R$,存在 $y\in R$,使 $\dfrac{f(x)-f(y)}{2}=2$,即 $f(x)=f(y)+4$，对于 $\forall x\in R$, $-1\le f(x)\le 1$,而 $3\le f(y)+4\le 5$，显然 $f(x)=f(y)+4$ 恒不成立，故假设不成立，所以本函数不符合题意，

17．

【解析】（1）解不等式 $x^2+x-2<0$，解得 $-2<x<1$；

当 $m=-1$ 时，解不等式 $x^2+3m+2<0$，得 $-2<x<-1$

因为 A,B 同时成立时，x 的取值范围为 $(-2,-1)$ ……….4分

（2）$P:\forall x\in A,x^2+(1-2a)x+a^2+a>8$

$\therefore \neg P:\exists x\in A,x^2+(1-2a)x+a^2+a\le 8$ 为真命题

设 $f(x)=x^2+(1-2a)x+a^2+a-8$，则 $f(x)\le 0$ 在 $(-2,1)$ 上有解

$f(-2)=a^2+5a-6\le 0\Rightarrow -6\le a\le 1$； $f(1)=a^2-a-6\le 0\Rightarrow -2\le a\le 3$

综上所述，a 取值范围为 $[-6,3]$ ………..6分

18．【解析】（1）

$$\frac{\sin B}{2\sin C-\sin B}=\frac{a^2-b^2-c^2}{b^2-a^2-c^2}=\frac{-2bc\cos A}{-2ac\cos B}=\frac{b\cos A}{a\cos B}=\frac{\sin B\cos A}{\sin A\cos B}\ \because \sin C\ne 0,$$

$\therefore 2\sin C\cos A=\sin B\cos A+\sin A\cos B=\sin(B+A)=\sin C$ ，

$\because \sin C\neq 0,\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}.\because 0<A<\pi,\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$ 6分

(2) $T=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}(1-\cos 2B)+\dfrac{1}{2}(1-\cos 2C)$

$=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}(\cos 2B+\cos 2C)=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\cos 2B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B\right]$

$=\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{2}\cos(2B+\dfrac{\pi}{3})$

$\because 0<B<\dfrac{2\pi}{3},\therefore 0<2B<\dfrac{4\pi}{3},\therefore \dfrac{\pi}{3}<2B+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{3}$

$\therefore -1\le\cos(2B+\dfrac{\pi}{3})<\dfrac{1}{2},\therefore \dfrac{3}{2}<T\le\dfrac{9}{4}$

..............6分

19．【解析】（1）由 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-b\ln x$ 得 $f'(x)=x-\dfrac{b}{x}=\dfrac{x^2-b}{x}$；

$\because b>0\ \therefore f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{b}$

$f(x)$ 的单调递增区间为 $[\sqrt{b},+\infty)$，单调递减区间为 $(0,\sqrt{b})$；

$f(x)$ 在 $x=\sqrt{b}$ 处的极小值为 $f(\sqrt{b})=\dfrac{b(1-\ln b)}{2}$，无极大值 4分

（2）当 $b\le 0,f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2]$ 内至多只有一个零点；

当 $b>0$ 时，由（1）得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上最小值为 $f(\sqrt{b})=\dfrac{b(1-\ln b)}{2}$，若 $f(x)$ 在区间 $(1,e^2]$ 内恰有两个零点，则需满足 $\begin{cases}1<\sqrt{b}<e^2\\ f(\sqrt{b})<0\\ f(1)>0\\ f(e^2)\ge 0\end{cases}$，整理得 $e<b\le\dfrac{e^4}{4}$ 8分

20．【解析】（1）由图象可得，$f(x)$ 的最小正周期

$T=4(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12})=\pi,\therefore|\omega|=\dfrac{2\pi}{T}=2,\because\omega>0,\therefore\omega=2$

由 $2\times\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 解得 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，

$\because|\varphi|<\dfrac{\pi}{2},\therefore\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$；$\therefore f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$

由 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$ 解得 $k\pi+\dfrac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 4分

（2）令 $t=f(x)$，方程可化为 $t^2+(4-a)t+3-a=0$，解得 $t_1=-1,t_2=a-3$

令 $f(x)=-1$, 可得 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$；$\because x\in\left[-\frac{7\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$，可得

$-\frac{5\pi}{4}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}$；$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$ 或 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$；故 $x=-\frac{\pi}{3}$ 或 $x=0$

因为方程 $f^2(x)+(4-a)f(x)+3-a=0$ 存在4个不相等的实数根，$\therefore a-3\ne-1$，

且方程 $f(x)=a-3$ 在 $\left[-\frac{7\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个根，所以函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

$x\in\left[-\frac{7\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 的图象与函数 $y=a-3$ 的图象有两个交点；$\because x\in\left[-\frac{7\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，

$-\frac{4\pi}{3}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}$；由正弦函数性质可得，当 $-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 为增函数，

$-2<f(x)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$；当 $-\frac{4\pi}{3}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le-\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 为减函数，$-2\le f(x)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $t_2=a-3$ 取值范围应在 $(-2,-1)$ 或 $(-1,\sqrt{3}]$；即 $-2<a-3<-1$ 或

$-1<a-3\le\sqrt{3}$；解得 $1<a<2$ 或 $2<a\le 3+\sqrt{3}$ 8分

21．【解析】（1）$\because f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$，$f(x)=t\cdot 2^x+\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{2^x+2^{-x}}{2}=t\cdot 2^x+\frac{1}{2}$，即

$t=\frac{1}{2}(2^{-2x}-2^{-x}+1)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 有解，令 $m=2^{-x}\in(0,1)$，所以 $t=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2})^2$；当

$m=\frac{1}{2}$ 时，$t_{\min}=\frac{3}{8}$；又当 $m\to 1$ 时，$t\to\frac{1}{2}$；即 $t\in[\frac{3}{8},\frac{1}{2})$ 4分

（2）$f(2x)+2bg(x)\ge 0$，即 $\frac{2^{2x}+2^{-2x}}{2}+b(2^x+2^{-x})\ge 0$，令 $2^x-2^{-x}=m$, 因为 $x\in[1,2]$，

所以 $y=2^x-2^{-x}$ 为增函数，所以 $m\in[\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$，则 $2^{2x}+2^{-2x}=m^2+2$，所以

$\frac{m^2+2}{2}+bm\ge 0$，化为 $b\ge-\frac{m^2+2}{2m}$ 对任意的 $m\in[\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$ 恒成立，$\varphi(m)=-\frac{m^2+2}{2m}$ 在

$m\in[\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$ 的最大值，$\varphi(m)=-\frac{m^2+2}{2m}=-(\frac{m}{2}+\frac{1}{m})$ 在 $m\in[\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$ 上单调递减，所以当

$m=\frac{3}{2}$ 时，取得最大值，$\varphi(\frac{3}{2})=-(\frac{3}{4}+\frac{2}{3})=-\frac{17}{12}$，所以 $b\ge-\frac{17}{12}$，实数 b 的取值范围为

$[-\frac{17}{12},+\infty)$ 8分

22．【解析】（1）因为 $f(x)=2\ln x-ax^2+3$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以

$f'(x)=\frac{2}{x}-2ax=\frac{2-2ax^2}{x}$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，若 $x\in(0,\frac{\sqrt{a}}{a})$, 则 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{a}}{a})$ 上单调递增；

若 $x\in(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty)$，则 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty)$ 上单调递减；

综上所述，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{a}}{a})$ 上单调递增，在 $(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty)$ 上单调递减；　　　　.........4分

（2）因为 $f(x)$ 的极大值为4，所以由（1）得 $a>0$；所以 $f(\frac{\sqrt{a}}{a})=2\ln\frac{\sqrt{a}}{a}-a(\frac{\sqrt{a}}{a})^2+3=4$，

解得 $a=\frac{1}{e^2}$　　　　..........2分

（3）证明：由（2）得此时 $f(x)=2\ln x-\frac{1}{e^2}x^2+3$，即 $f'(x)=\frac{2(e+x)(e-x)}{e^2x}$

当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减；所以函数 $f(x)$ 在 $x=e$ 时有极大值，极大值为4；

即若证明 $f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$，即证 $\frac{x_1+x_2}{2}>e$，即 $x_1+x_2>2e$；

令 $x_1<x_2$，则证明 $x_2>2e-x_1>e$

令 $F(x)=f(x)-f(2e-x),x\in(0,e)$，则

$F'(x)=2(\frac{1}{x}-\frac{x}{e^2})+2(\frac{1}{2e-x}-\frac{2e-x}{e^2})=\frac{4e}{x(2e-x)}-\frac{4}{e}>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，所以 $F(x)<F(e)=0$，所以 $\frac{x_1+x_2}{2}>e$

故 $f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$。　　　　..........6分