

机密★启用前(新教材卷)

华大新高考联盟 2024 届高三 11 月教学质量测评

数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】B

【命题意图】本题考查复数的四则运算、复数的概念,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意, $\frac{2-i}{1+2i}+2 = \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+2 = 2-i$, 故 $\left| \frac{2-i}{1+2i}+2 \right| = \sqrt{5}$, 故选 B.

2.【答案】D

【命题意图】本题考查排列组合、数学情境问题,考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】因为 $a_0=1$, 故在 a_1, a_2, \dots, a_8 中只需有 3 个 1 即可, 故所求个数为 $C_8^3=56$, 故选 D.

3.【答案】B

【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质,考查数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】依题意, $4+m=9$, 则 $m=5$, 故 C 的渐近线方程为 $\sqrt{5}x \pm 2y=0$, 故所求距离为 $d = \frac{|3 \times \sqrt{5}|}{3} = \sqrt{5}$, 故

选 B.

4.【答案】A

【命题意图】本题考查平面向量的坐标运算、平面向量的数量积,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意, $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{3\lambda+2}{\sqrt{\lambda^2+4} \cdot \sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 解得 $\lambda = \frac{8}{3}$, 故选 A.

5.【答案】B

【命题意图】本题考查复合函数、函数的单调性,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】令 $e^x=t>0$, 则原函数化为 $y=t^2-4t+5$, 其在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 则 $m \geq \ln 2$, 故选 B.

6.【答案】D

【命题意图】本题考查导数的几何意义、两直线的位置关系,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】易知直线 l 的斜率为 9, 设切点 (x_0, y_0) , 而 $y'=3x^2-6x$, 故 $3x_0^2-6x_0=9$, 解得 $x_0=-1$ 或 $x_0=3$,

故切点 A 坐标为 $(-1, -4)$ 或 $(3, 0)$, 故点 A 到曲线 C 的对称中心的距离为 $\frac{\sqrt{(3+1)^2+(0+4)^2}}{2} = 2\sqrt{2}$,

故选 D.

7.【答案】A

【命题意图】本题考查三角恒等变换,考查数学运算、逻辑推理、数据分析的核心素养.

【解析】依题意, $\frac{1}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}} - \tan \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}} - \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$, $1 + \tan(\alpha-\beta) \tan \frac{\alpha-\beta}{2} =$

$\frac{\cos(\alpha-\beta)\cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\alpha-\beta)\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos(\alpha-\beta)\cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{1}{\cos(\alpha-\beta)}$, 故 $\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha-\beta)} = 6$, 则 $\sin(\alpha-\beta) =$

$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$ ①, 而 $\sin \alpha \cos \beta = 3 \cos \alpha \sin \beta$ ②, 联立①②, 解得 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}$, 故选 A.

8. 【答案】C

【命题意图】本题考查分段函数的图象与性质, 考查数学运算、逻辑推理、直观想象、数据分析的核心素养.

【解析】依题意, $f(x)$ 在 $(-\infty, 4]$ 上单调递增, 在 $(4, 16)$ 上单调递减, 在 $[16, +\infty)$ 上单调递增; 易知 $\ln \lambda \leq \lambda - 1$, 取 $\lambda = 1$, 可知 $f(\ln \lambda) = f(\lambda - 1)$, 取 $\lambda = e$, 可知 $f(\ln \lambda) < f(\lambda - 1)$, 取 $\lambda = e^2$, 可知 $f(\ln \lambda) > f(\lambda - 1)$, 故 A、B 错误; 当 $0 < \lambda \leq 2$ 时, $4 \geq 2^2 \geq \lambda^2$, 故 $f(2^2) \geq f(\lambda^2)$, 当 $2 < \lambda < 4$ 时, $4 < 2^2 < \lambda^2 < 16$, 故 $f(2^2) > f(\lambda^2)$, 当 $\lambda \geq 4$ 时, $2^2 \geq \lambda^2 > 16$, 故 $f(2^2) \geq f(\lambda^2)$; 综上, $f(2^2) \geq f(\lambda^2)$ 恒成立, 故 C 正确, D 错误, 故选 C.

二、选择题

9. 【答案】AC

【命题意图】本题考查不等式的解法、集合的表示、集合的运算, 考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意, $M = \{x | (x-2)(x+3) < 0\} = \{x | -3 < x < 2\}$, 故 $M \cap N = \{x | -1 < x < 2\}$, $\complement_{\mathbb{R}} M = \{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 2\}$, $M \cup N = \{x | -3 < x < 5\}$, $M \cap (\complement_{\mathbb{R}} N) = \{x | -3 < x \leq -1\}$, 故选 AC.

10. 【答案】ABC

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系, 考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为 $BA_1 = BD, A_1E = ED$, 故 $EB \perp A_1D$, 而 $B_1C \parallel A_1D$, 故 $EB \perp B_1C$, 故 A 错误; 直线 EB 与直线 ED 均在平面 ABC_1D_1 上, 故 B 错误; 平面 ABC_1 就是平面 ABC_1D_1 , 故点 $E \in$ 平面 ABC_1 , 故 C 错误; 因为平面 $B_1D_1C_1 \parallel$ 平面 A_1BD , 且直线 $EB \subset$ 平面 A_1BD , 故直线 $EB \parallel$ 平面 $B_1D_1C_1$, 故 D 正确; 故选 ABC.

11. 【答案】BD

【命题意图】本题考查圆的方程、直线与圆的位置关系, 考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意, 圆 C 圆心在直线 $x=4$ 上, 设 $C(4, c)$, 则 $(4-2)^2 + c^2 = 4^2 + (c-2)^2$, 解得 $c=0$, 圆 $C: (x-4)^2 + y^2 = 4$, 故 A 错误; 四边形 ACBM 面积 $S = |MA| \cdot |AC| = 2\sqrt{|MA|^2 - 4}$, 而 $|MC|_{\min} = 2\sqrt{2}$, 故 $S_{\min} = 4$, 故 B 正确; 结合图象的对称性可知, 当 M 在线段 $y=x(0 \leq x \leq 4)$ 的中点时, 圆 C 的面积最小, 为 2π , 故 C 错误; 当 M 在线段 $y=x(0 \leq x \leq 4)$ 的两个端点时, 圆 C 的面积最大, 为 3π , 故 D 正确; 故选 BD.

12. 【答案】CD

【命题意图】本题考查椭圆的方程、椭圆的性质, 考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析 1】设直线 $MN: y = kx$, 其中 $k \neq 0$, 联立 $\begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}}$, 不妨设 $M\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}}, \frac{kab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}}\right)$, $N\left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}}, -\frac{kab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}}\right)$, 则 $A\left(\frac{c}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{b^2 + a^2k^2}}, \frac{kab}{2\sqrt{b^2 + a^2k^2}}\right)$, $B\left(\frac{c}{2} - \frac{ab}{2\sqrt{b^2 + a^2k^2}}, -\frac{kab}{2\sqrt{b^2 + a^2k^2}}\right)$, 而 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, 故 $\frac{c^2}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2b^2}{b^2 + a^2k^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{k^2a^2b^2}{b^2 + a^2k^2} = 0$, 整理得 $k^2 = \frac{(e^2 - 1)^2}{2e^2 - 1} > 0$, 故 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$, 观察可知, 故选 CD.

【解析 2】依题意, 可得 $A\left(\frac{x_1 + c}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$, $B\left(\frac{c - x_1}{2}, -\frac{y_1}{2}\right)$, 又有 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, 故 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 即 $\frac{c^2 - x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{4} = 0$, $x_1^2 + y_1^2 = c^2$; 又有 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, 即圆 $x^2 + y^2 = c^2$ 与椭圆 C 有公共点且公共点不在坐标轴上, 故 $a > c > b$, 即

$c^2 > a^2 - c^2$, 故 $e^2 > \frac{1}{2}$, $e \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, 故选 CD.

【解析3】依题意, $\vec{FM} = 2\vec{FA}$, $\vec{FN} = 2\vec{FB}$, 故 A, B 分别是线段 FM, FN 的中点, 故 $OA \parallel FN$, $OB \parallel FM$; 又有 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, 故 $FN \perp FM$, $\vec{OM} + \vec{ON} = \mathbf{0}$, 则 $|OM| = |ON| = |OF| = c$; 因为 $|OM| \in (b, a)$, 故 $b < c$, 即 $a^2 - c^2 < c^2$, 得 $e^2 > \frac{1}{2}$, $e \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, 故选 CD.

三、填空题

13. **【答案】**0.84.

【命题意图】本题考查正态分布及其应用, 考查数学运算、直观想象、数学建模的核心素养.

【解析】依题意, $X \sim N(15, 3^2)$, 故 $P(6 \leq X \leq 18) = P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \frac{0.6827 + 0.9973}{2} = 0.84$.

14. **【答案】**52π.

【命题意图】本题考查空间几何体的表面积与体积, 考查数学运算、直观想象、数学建模的核心素养.

【解析】易知该圆台的上、下底面的半径分别为 2, 6, 故圆台的高为 3, 则圆台的体积 $V = \frac{1}{3} \times (4\pi + 36\pi + 12\pi) \times 3 = 52\pi$.

15. **【答案】** $(\frac{27}{4}, \frac{39}{4}]$.

【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质, 考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意, $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$, 令 $\omega x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x = \frac{\pi}{4\omega} + \frac{k\pi}{\omega} (k \in \mathbf{Z})$, 则 $\frac{\pi}{4\omega} + \frac{2\pi}{\omega} < \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{4\omega} + \frac{3\pi}{\omega}$, 解得 $\frac{27}{4} < \omega \leq \frac{39}{4}$, 故实数 ω 的取值范围为 $(\frac{27}{4}, \frac{39}{4}]$.

16. **【答案】**5.

【命题意图】本题考查数列的性质, 考查数学运算、逻辑推理、数据分析的核心素养.

【解析】因为 $\sum_{i=1}^n \frac{4i}{a_{2i}} = 3n^2 + n$, 故当 $n = 1$ 时, $\frac{4}{a_2} = 4$, 故 $a_2 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $\sum_{i=1}^n \frac{4i}{a_{2i}} = 3(n-1)^2 + (n-1)$, 则 $\sum_{i=1}^n \frac{4i}{a_{2i}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{4i}{a_{2i}} = \frac{4n}{a_{2n}} = 6n - 2$, 故 $a_{2n} = \frac{2n}{3n-1} > \frac{2}{3}$; 而当 n 为奇数时, $a_n = \frac{(\sqrt{\lambda})^{n-1}}{n}$, 即 $a_{2n-1} = \frac{\lambda^{n-1}}{2n-1}$, 而 $(5\lambda - 7)(3\lambda - 5) < 0$, 故 $\frac{7}{5} < \lambda < \frac{5}{3}$, 则 $a_{2n-1} - a_{2n-1} = \frac{\lambda^n}{2n+1} - \frac{\lambda^n}{2n-1} = \frac{\lambda^n(2n-1) - \lambda^n(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$. 令 $f(n) = \lambda^n(2n-1) - \lambda^{n-1}(2n+1) = \lambda^{n-1}[(2\lambda-2)n - (\lambda+1)] > 0$, 得 $n > \frac{\lambda+1}{2\lambda-2}$; 而 $\frac{7}{5} < \lambda < \frac{5}{3}$, $\therefore \frac{2}{5} < \lambda - 1 < \frac{2}{3}$, $\therefore \frac{3}{2} < \frac{1}{\lambda-1} < \frac{5}{2}$, $\therefore \frac{\lambda+1}{2\lambda-2} = \frac{\lambda-1+2}{2\lambda-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda-1} \in (2, 3)$, \therefore 当 $n \leq 2$ 时, $a_{2n+1} < a_{2n-1}$, 当 $n \geq 3$ 时, $a_{2n+1} > a_{2n-1}$, 即奇数项中 a_5 最小; 而 $a_5 = \frac{\lambda^4}{5} < \frac{5}{9} < \frac{2}{3} < a_{2n}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的最小项为 $a_5 = \frac{\lambda^4}{5}$, 故当 a_n 取得最小值时, $n = 5$.

四、解答题

17. **【命题意图】**本题考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换, 考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1) 依题意, $b^2 = c^2 - a^2$, (1分)

而 $2a \cos B + a = c$, 由余弦定理, 即 $2a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + a = c$, (2分)

故 $(2a-c)(a+c)=0$, 故 $2a=c$, (4分)

代入 $a=\frac{c}{2\cos B+1}$ 中, 得 $\cos B=\frac{1}{2}$, 而 $0<B<\pi$, 故 $B=\frac{\pi}{3}$; (5分)

(2)不妨设 $AB=c=3$, 则 $AM=1, BM=2, BC=AB\cos B=\frac{3}{2}$,

在 $\triangle BCM$ 中, 由余弦定理得, $CM^2=BC^2+BM^2-2BC\cdot BM\cdot \cos B=\frac{13}{4}$, (7分)

由正弦定理得, $\frac{CM}{\sin B}=\frac{BM}{\sin \angle BCM}$, 故 $\sin \angle BCM=\frac{BM\cdot \sin B}{CM}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$, (9分)

$\cos 2\angle BCM=1-2\sin^2 \angle BCM=1-2\times\frac{12}{13}=-\frac{11}{13}$ (10分)

18.【命题意图】本题考查频率分布直方图、样本的数字特征、离散型随机变量的分布列以及数学期望, 考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】(1)依题意, $10a+0.35+0.3+0.1+0.05=1$, 解得 $a=0.02$; (2分)

所求平均数为 $45\times 0.2+55\times 0.35+65\times 0.3+75\times 0.1+85\times 0.05=59.5$; (4分)

(2)从日均体育活动时间在 $[70, 80]$ 中抽取 8 人, 日均体育活动时间在 $[80, 90]$ 中抽取 4 人, 故所求概率

$P=\frac{C_8^3+C_8^2C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{42}{55}$; (7分)

(3)依题意, $X\sim B\left(4, \frac{2}{5}\right)$,

故 $P(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$, $P(X=1)=C_4^1\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$,

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$, $P(X=3)=C_4^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{96}{625}$,

$P(X=4)=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$; (10分)

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

故 $E(X)=4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$ (12分)

19.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角, 考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)连接 BE , 如图所示. 因为 $\angle ADC=\angle BCD=90^\circ$, 故 $BC\parallel AD$,

因为 $BC=\frac{1}{2}AD=DE$, 故四边形 $BCDE$ 为矩形,

不妨设 $BE=CD=2$; (1分)

$\because SA=SD$ 且点 E 为线段 AD 的中点, $\therefore SE\perp AD$,

所以 $SD=\sqrt{SE^2+DE^2}=2\sqrt{5}$, 故 $SB=SD=2\sqrt{5}$; (2分)

故 $SE^2+BE^2=SB^2$, 即 $SE\perp BE$; (3分)

又 $AD\cap BE=E$, 故 $SE\perp$ 平面 $ABCD$; (4分)

而 $AC\subset$ 平面 $ABCD$, 故 $SE\perp AC$; (5分)

(2)以 E 为原点, EA 为 x 轴, EB 为 y 轴, ES 为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则不妨设 $AD=4$, 则 $A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2, 2, 0), S(0, 0, 4)$,

所以 $\vec{AB} = (-2, 2, 0)$, $\vec{SB} = (0, 2, -4)$,
 设平面 SAB 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

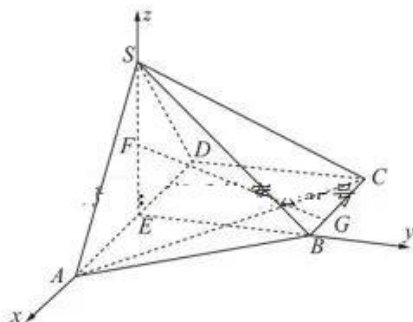
$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{AB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{SB} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2x_1 + 2y_1 = 0, \\ 2y_1 - 4z_1 = 0, \end{cases} \text{取} \mathbf{n} = (2, 2, 1); \dots\dots (8 \text{分})$$

设 $BG = t \in (0, 2)$, 则 $G(-t, 2, 0)$, 而 $F(0, 0, 2)$, 所以 $\vec{GF} = (t, -2, 2)$,

设直线 FG 与平面 SAB 所成的角为 θ , $\tan \theta = \frac{\sqrt{26}}{26}$,

$$\text{则} \sin \theta = |\cos \langle \vec{GF}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{2t - 4 + 2}{\sqrt{t^2 + 4 + 4} \cdot \sqrt{9}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{9}, \dots\dots (10 \text{分})$$

$$\text{化简得} 11t^2 - 24t + 4 = 0, \text{解得} t = \frac{2}{11} (t = 2 \text{ 舍去}); \text{故} \frac{BG}{BC} = \frac{1}{11}. \dots\dots (12 \text{分})$$



20. 【命题意图】本题考查数列的基本运算、错位相减法, 考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 2a_n + \lambda$, $S_{n-1} = 2a_{n-1} + \lambda$,

$$\text{两式相减可得} a_n = 2a_{n-1}; \dots\dots (2 \text{分})$$

而当 $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 + \lambda$, 得 $a_1 = -\lambda$;

$$S_3 = -\lambda - 2\lambda - 4\lambda = -7\lambda, \text{故} -7\lambda = 14, \text{解得} \lambda = -2, \text{则} a_1 = 2, \dots\dots (4 \text{分})$$

$$a_n = 2^n, \dots\dots (5 \text{分})$$

(2) 依题意 $T_n = (3n-10) \cdot 2^n$,

$$\text{故} T_n = -7 \cdot 2^1 - 4 \cdot 2^2 - 1 \cdot 2^3 + \dots + (3n-10) \cdot 2^n, \dots\dots (6 \text{分})$$

$$2T_n = -7 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2^3 - 1 \cdot 2^4 + \dots + (3n-13) \cdot 2^n + (3n-10) \cdot 2^{n+1}, \dots\dots (7 \text{分})$$

$$\text{两式相减可得} -T_n = 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 3 \cdot 2^n - (3n-10) \cdot 2^{n+1} - 20, \dots\dots (8 \text{分})$$

$$\text{即} -T_n = 3 \cdot \frac{2(1-2^n)}{1-2} - (3n-10) \cdot 2^{n+1} - 20, \text{故} T_n = (3n-10) \cdot 2^{n+1} + 26. \dots\dots (12 \text{分})$$

21. 【命题意图】本题考查抛物线的方程、直线与抛物线的综合性问题, 考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(x_3, y_3)$, $Q(x_4, y_4)$;

$$(1) \text{设直线} l_1: x = ny + 1, \text{联立} \begin{cases} x = ny + 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{得} y^2 - 4ny - 4 = 0,$$

$$\Delta = 16n^2 + 16 > 0; \text{则} y_1 + y_2 = 4n, y_1 y_2 = -4; \dots\dots (2 \text{分})$$

$$\text{故} S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{16n^2 + 16} = 4\sqrt{5}, \text{解得} n = \pm 2, \dots\dots (4 \text{分})$$

$$\text{故直线} l_1 \text{的斜率为} \pm \frac{1}{2}; \dots\dots (5 \text{分})$$

(2) 设直线 MP 的方程为 $x = my + \lambda$,

$$\text{联立直线} MP \text{与抛物线的方程,} \begin{cases} x = my + \lambda, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{消去} x \text{得} y^2 - 4my - 4\lambda = 0,$$

$$\text{故} y_1 y_3 = -4\lambda; \dots\dots (7 \text{分})$$

$$\text{由(1)可知,} y_2 = -\frac{4}{y_1}, \text{同理可得} y_4 = -\frac{4}{y_3}, \dots\dots (9 \text{分})$$

$$\text{故} \frac{S_{\triangle MPF}}{S_{\triangle NQF}} = \frac{\frac{1}{2} |MF| |PF| \sin \angle MFP}{\frac{1}{2} |NF| |QF| \sin \angle NFQ} = \frac{|MF| |PF|}{|NF| |QF|} = \frac{|y_1 y_3|}{|y_2 y_4|} = \frac{y_1^2 y_3^2}{16} = \lambda^2,$$

显然 $\lambda \neq 1$, 故 $\frac{S_{\triangle MPF}}{S_{\triangle MQF}} + \frac{1}{4} = \lambda^2 + \frac{1}{4} \geq \lambda$, 当且仅当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时等号成立. (12分)

22. 【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质, 考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 依题意, $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = m + \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} = \frac{mx^2 + x - m}{x^2}$, (1分)

若 $m=0$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; (2分)

若 $m \neq 0$, 则 $\Delta = 1 + 4m^2 > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}$, $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}$,

其中 $x_1 + x_2 = -\frac{1}{m}$, $x_1 x_2 = -1$

若 $m > 0$, 则 $x_1 < 0 < x_2$, 故当 $x \in (0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty)$ 时,

$f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m})$ 上单调递减, 在 $(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty)$ 上单调递增;

..... (4分)

若 $m < 0$, 则 $x_2 < 0 < x_1$, 故当 $x \in (0, \frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty)$ 时,

$f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m})$ 上单调递增, 在 $(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty)$ 上单调递减;

综上所述, 当 $m=0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $m > 0$ 时, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m})$ 上单

调递减, 在 $(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty)$ 上单调递增; 当 $m < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m})$ 上单调递增,

在 $(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty)$ 上单调递减; (6分)

(2) 依题意, $\frac{2k(a-b)}{2\sqrt{ab}+a+b} + ma + \ln b + mb - \frac{m}{b} - \frac{m}{a} = \ln a + ma - \frac{m}{a} + \frac{m}{b} + mb$,

即 $\frac{2k(a-b)}{2\sqrt{ab}+a+b} < \ln \frac{a}{b}$, 即 $\frac{k(\frac{a}{b}-1)}{\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{2}(\frac{a}{b}+1)} < \ln \frac{a}{b}$, 即 $k \cdot \frac{\frac{a}{b}-1}{\ln \frac{a}{b}} < \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{2}(\frac{a}{b}+1)$ 恒成立,

令 $t = \sqrt{\frac{a}{b}}$, ($t > 1$), 有 $k \cdot \frac{t^2-1}{2\ln t} < t + \frac{1}{2}(t^2+1)$ 恒成立, (8分)

得 $k \cdot \frac{t-1}{2\ln t} < \frac{1}{2}(t+1)$ 恒成立, 所以 $k \cdot \frac{t-1}{t+1} - \ln t < 0$ 恒成立

令 $g(t) = k \cdot \frac{t-1}{t+1} - \ln t$, 有 $g'(t) = k \cdot \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{1}{t} = \frac{2kt - (t+1)^2}{(t+1)^2 \cdot t} = \frac{-t^2 + 2(k-1)t - 1}{(t+1)^2 \cdot t}$, (注: $g(1) = 0$)

..... (9分)

i 当 $g'(1) > 0$ 时, 即 $k > 2$ 时, 易知方程 $-t^2 + 2(k-1)t - 1 = 0$ 有一根 t_1 大于 1, 一根 t_2 小于 1, 所以 $g(t)$ 在 $[1, t_1)$ 上单调递增,

故有 $g(t_1) > g(1) = 0$, 不符; (10分)

ii 当 $0 < k \leq 2$ 时, 有 $2kt - (t+1)^2 \leq 4t - (t+1)^2 = -(t-1)^2 \leq 0$, 所以 $g'(t) \leq 0$, 当且仅当 $t=1$ 时等号成立, 从而 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故当 $t > 1$ 时, 恒有 $g(t) < g(1) = 0$, 符合. (11分)

由 i、ii 可知, 正实数 k 的取值范围为 $0 < k \leq 2$, 因此, k 的最大值为 2. (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

