高三联考数学参考答案(文科)

1. A　因为 $B=\{x\in\mathbf{N}\mid |x|\leqslant 2\}=\{0,1,2\}$,所以 $A\cup B=\{0,1,2,3\}$.

2. D　p 的否定是 $\forall x\in\mathbf{Q},\frac{1}{x^2}\notin\mathbf{Q}$. q 的否定是 $\exists x\in\mathbf{Q},\frac{1}{x^2}\notin\mathbf{Q}$.

3. A　要得到函数 $y=\sin(x+1)$的图象,只需要将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 1 个单位长度.

4. C　因为 α 为第二象限角,所以 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$,则 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0,\cos\alpha-\sin\alpha<0,\sin\alpha\tan\alpha<0,\sin\alpha+\cos\alpha$ 的取值不确定. 故选 C.

5. A　由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向,由 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 可知,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,所以"$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$"是"存在非零实数 x,y,使得 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$"的充分不必要条件.

6. B　$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=-|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-2^2+\frac{1}{2}\times 2^2+\frac{1}{2}\times 2\times 2\cos 60^\circ=-1$.

7. A　取 $x=\frac{\pi}{2}$,则 $\sin x=1$,故命题 p 为真,$y=e^x$ 的图象恒在 $y=\ln x$ 的图象上方,故命题 q 为真,所以 $p\wedge q$ 为真,$(\neg p)\wedge q$ 为假,$p\wedge(\neg q)$为假,$(\neg p)\wedge(\neg q)$为假.

8. B　$\frac{(\sin\theta+\cos\theta)\cos 2\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta}\cdot\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{9}{10}$.

9. A　因为 $f(x+1)$是奇函数,所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$,则 $f(1)=0$. 又 $f(2x+3)$是偶函数,所以 $f(-2x+3)=f(2x+3)$,所以 $f(5)=f(1)=0$.

10. D　因为 $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{1}{\cos\alpha}$,所以$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\alpha}$,所以 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\beta$,即 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)$. 又 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}),\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\beta$,即 $2\beta+\alpha=\frac{\pi}{2}$或 $\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}-\beta=\pi$,即 $\alpha=\frac{\pi}{2}$(舍去).

11. C　令 $g(x)=f(x)-1=x^3+x$,则 $g(x)$是奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,由 $f(1-x)+f(2x)>2$,可得$g(1-x)+1+g(2x)+1>2$,即 $g(1-x)>-g(2x)=g(-2x)$,则 $1-x>-2x$,解得 $x>-1$.

12. B　由函数 $f(x)=\sin 2x-a\cos 2x$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{8}$对称,得 $f(\frac{3\pi}{8})=\pm\sqrt{1+a^2}$,则 $\frac{\sqrt{2}(a+1)}{2}=\pm\sqrt{1+a^2}$,解得 $a=1$,$\frac{|x_2-x_1|}{a}=|x_2-x_1|$,所以 $f(x)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$. 又由 $f(x)_{\max}=\sqrt{2}$,可得 $f(x_1)=f(x_2)=\sqrt{2}$,所以$\frac{|x_2-x_1|}{a}$的最小值为 $T=\pi$.

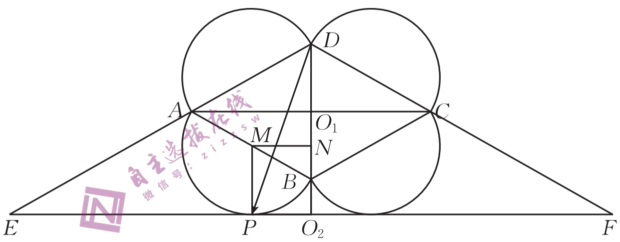
13. $y=3x-3$　因为 $f(x)=\frac{x^3-1}{x}$,所以 $f'(x)=\frac{3x^3-(x^3-1)}{x^2}=\frac{2x^3+1}{x^2}$,则 $f(1)=0,f'(1)$

$=3$，所以所求切线的方程为 $y-0=3(x-1)$，即 $y=3x-3$.

14. $[0,400)$　当 $m=0$ 时，$100>0$ 恒成立，符合题意. 当 $m\neq0$ 时，由 $\begin{cases}m>0,\\ m^2-400m<0,\end{cases}$ 解得 $0<m<400$. 故 m 的取值范围是 $[0,400)$.

15. $[2,4)$　因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $0\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi\omega}{2}$，所以 $\pi\leqslant\frac{\pi\omega}{2}<2\pi$，解得 $2\leqslant\omega<4$，因此实数 ω 的取值范围是 $[2,4)$.

16. $\frac{5}{2}$　如图，设 $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DF}=k\overrightarrow{DC}$，$P$ 是直线 EF 上一点，令 $\overrightarrow{DP}=x\overrightarrow{DE}+y\overrightarrow{DF}$，则 $x+y=1$，$\lambda+\mu=k(x+y)=k$. 因为 P 是四个半圆弧上的一动点，所以当 EF 与图形下面两个半圆相切时，$\lambda+\mu$ 取得最大值. 设线段 AB 的中点为 M，线段 AC 的中点为 O_1，连接 MP，连接 DO_1 并延长使之与 EF 交于点 O_2，过 M 作 $MN\perp DO_2$，垂足为 N. 因为 $\angle ABC=120°$，$AB=2$，所以



$DO_1=1$，$O_1O_2=O_1N+NO_2=O_1N+MP=\frac{3}{2}$，则 $DO_2=\frac{5}{2}$.

由 $\triangle DAC\backsim\triangle DEF$，得 $k=\frac{DE}{DA}=\frac{DO_2}{DO_1}=\frac{5}{2}$，故 $\lambda+\mu$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$.

17. 解：(1)由图可得，$f(x)$ 的最小正周期 $T=4\times(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6})=\pi$.

因为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，且 $\omega>0$，所以 $\omega=2$. ………………………………………… 2 分

因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称，

所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 4 分

故 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$. ………………………………………… 5 分

(2)由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………… 7 分

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，最大值为 2； ………………………… 8 分

当 $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $-\sqrt{3}$. ………………… 9 分

故 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3},2]$. ………………………………………… 10 分

18. 解：(1) $f(x)=ax^4+bx^3$，$f'(x)=4ax^3+3bx^2$， ………………………………………… 1 分

因为 $f(x)=ax^4+bx^3$ 在 $x=1$ 处取得极值 -1，

所以 $f(1)=a+b=-1, f'(1)=4a+3b=0$，………………………………………………… 3 分

解得 $a=3, b=-4$，经验证，$f(x)=3x^4-4x^3$ 在 $x=1$ 处取得极值 -1，故 $a=3, b=-4$. …

…………………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)$g'(x)=f'(x)-m=12x^3-12x^2-m\geqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，即 $m\leqslant 12x^3-12x^2$ 在 $x\in[-1,1]$ 内恒成立. ……………………………………………………………………… 6 分

令 $h(x)=12x^3-12x^2, x\in[-1,1]$，

则 $h'(x)=12x(3x-2)$，令 $h'(x)>0$，得 $-1<x<0$ 或 $\frac{2}{3}<x<1$，

所以 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(\frac{2}{3},1)$ 上单调递增，在 $(0,\frac{2}{3})$ 上单调递减， ………………… 8 分

因为 $h(-1)=-24, h(\frac{2}{3})=-\frac{16}{9}$，所以 $h(x)_{\min}=-24$， ………………………………… 10 分

所以 $m\leqslant -24$，即 m 的取值范围为 $(-\infty,-24]$. ……………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}+a$，

所以 $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+a+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}+a=1+2a$. ……………………………… 3 分

因为 $\lg 2+\lg 5=1$，所以 $f(\lg 2)+f(\lg 5)=1+2a=3$，…………………………………… 5 分

则 $a=1$. ………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知，$f(x)\geqslant 4^x+m$ 等价于 $(4^x)^2+m\cdot 4^x+2m-2\leqslant 0$. ………………… 7 分

令 $t=4^x$，则 $t\in[\frac{1}{4},4]$， ……………………………………………………………… 8 分

原不等式等价于 $t^2+mt+2m-2\leqslant 0$ 在 $[\frac{1}{4},4]$ 上恒成立， ……………………………… 9 分

则 $\begin{cases}\frac{1}{16}+\frac{1}{4}m+2m-2\leqslant 0,\\ 16+4m+2m-2\leqslant 0,\end{cases}$ …………………………………………………………… 11 分

解得 $m\leqslant -\frac{7}{3}$，故 m 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{7}{3}]$. ……………………………………… 12 分

20. 解：(1)$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ ……………… 2 分

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$， ……………………………………… 3 分

$\because 2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$， …………………………………… 4 分

$\therefore k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi+\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{2\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$. ……………………………… 6 分

(2)由(1)知，$f(x_0)=2\sin(2x_0+\frac{\pi}{6})$，

又∵$f(x_0)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，∴$\sin(2x_0+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，…………………………………………………… 8 分

∵$x_0\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$，则 $2x_0+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}]$，

∴$\cos(2x_0+\frac{\pi}{6})<0$，∴$\cos(2x_0+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，…………………………………………… 9 分

则 $\cos 2x_0=\cos[(2x_0+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}]=\cos(2x_0+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\sin(2x_0+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$ ……… 11 分

$=(-\frac{\sqrt{6}}{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}$. …………………………………………………… 12 分

21. 证明：(1)$f'(x)=6x^2-ae^x$， …………………………………………………………………… 1 分

则 $f'(0)=-a$. …………………………………………………………………………………… 2 分

又 $f(0)=-a$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-(-a)=-ax$，………

…………………………………………………………………………………………………… 3 分

即 $y=-a(x+1)$，所以切线经过定点 $(-1,0)$. ……………………………………………… 5 分

(2)当 $a\in(-\infty,0]$ 时，$f'(x)=6x^2-ae^x>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，……………………… 6 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无极值. …………………… 7 分

当 $a\in[\frac{24}{e^2},+\infty)$ 时，$f'(x)=e^x(\frac{6x^2}{e^x}-a)$，设函数 $g(x)=\frac{6x^2}{e^x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{6x(2-x)}{e^x}$.

若 $0<x<2$，则 $g'(x)>0$；若 $x>2$，则 $g'(x)<0$. ………………………………………… 8 分

所以 $g(x)_{max}=g(2)=\frac{24}{e^2}$， ………………………………………………………………… 9 分

所以当 $a\in[\frac{24}{e^2},+\infty)$ 时，$\frac{6x^2}{e^x}-a\leqslant 0$，所以 $f'(x)=e^x(\frac{6x^2}{e^x}-a)\leqslant 0$， ……………… 10 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无极值. …………………… 11 分

综上，当 $a\in(-\infty,0]\cup[\frac{24}{e^2},+\infty)$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无极值. …………………… 12 分

22. (1)解：$f'(x)=\ln x+1-a$. …………………………………………………………………… 1 分

因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $\ln x+1-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant\ln x+1$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立. ………………………………… 3 分

因为 $g(x)=\ln x+1$ 是增函数，$g(1)=1$，所以 $a\leqslant 1$.

故 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. …………………………………………………………………… 5 分

(2)证明：要证 $f(x)>\frac{x^2}{e^{x-1}}-\frac{5}{2}$，即证 $\frac{5}{2}+x(\ln x-1)>\frac{x^2}{e^{x-1}}$. ……………………………… 6 分

令函数 $h(x)=\frac{5}{2}+x(\ln x-1)$，则 $h'(x)=\ln x$. 当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增. 故 $h(x)\geqslant h(1)=\dfrac{3}{2}$. …………………… 8 分

令函数 $m(x)=\dfrac{x^2}{e^{x-1}}(x>0)$，则 $m'(x)=\dfrac{x(2-x)}{e^{x-1}}$. 当 $x\in(0,2)$时，$m'(x)>0$，$m(x)$单调递增；当 $x\in(2,+\infty)$时，$m'(x)<0$，$m(x)$单调递减. 故 $m(x)\leqslant m(2)=\dfrac{4}{e}<\dfrac{3}{2}$. ……… 11 分

从而$\dfrac{5}{2}+x(\ln x-1)>\dfrac{x^2}{e^{x-1}}$，命题得证. ……………………………………………… 12 分