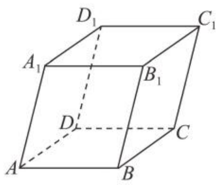
2023～2024 学年度高二期中联考

数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】因为直线过点$(-1,2)$,$(2,2+\sqrt{3})$,所以直线的斜率$k=\dfrac{2+\sqrt{3}-2}{2+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.故选 A.

2.A 【解析】∵$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为平行六面体,∴$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1C}$.故选 A.



3.A 【解析】由题意,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,又$\boldsymbol{a}=(-4,2,3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,-1,x)$,故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-4)\times(-2)+2\times(-1)+3x=0$,解得$x=-2$.故选 A.

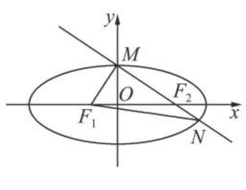
4.B 【解析】由$x^2+y^2-2y=0$,得$x^2+(y-1)^2=1$,所以圆心为$(0,1)$,半径为 1.而直线$l:y=k(x-1)+1$可化为$kx-y+1-k=0$,所以圆心$(0,1)$到直线l的距离为$d=\dfrac{|-k-1+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}<1$,则直线$l$和圆相交.故选 B.

5.C 【解析】因为$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=4-4+4=4$,所以$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.故选 C.

6. C 【解析】因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AF}$,所以$|\overrightarrow{EF}|^2=(\overrightarrow{EA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AF})^2=\overrightarrow{EA'}^2+\overrightarrow{A'A}^2+\overrightarrow{AF}^2+2\overrightarrow{EA'}\cdot\overrightarrow{A'A}+2\overrightarrow{EA'}\cdot\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{AF}$,因为$AA'\perp a$,$AA'\perp b$,则$\overrightarrow{EA'}\cdot\overrightarrow{A'A}=0$,$\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{AF}=0$,故$5^2=2^2+(3\sqrt{2})^2+3^2+2\times2\times3\times\cos\langle\overrightarrow{EA'},\overrightarrow{AF}\rangle$,解得$\cos\langle\overrightarrow{EA'},\overrightarrow{AF}\rangle=-\dfrac{1}{2}$,即$\langle\overrightarrow{EA'},\overrightarrow{AF}\rangle=120°$,故两条异面直线$a$,$b$所成角为$60°$.故选 C.

7.B 【解析】∵AB为圆$C_1:(x-2)^2+y^2=3$的弦,$|AB|=2\sqrt{2}$,∴AB中点N到圆心$C_1(2,0)$的距离为$\sqrt{3-\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=1$,由圆的定义可知,点$P$的运动轨迹为以$C_1(2,0)$为圆心,半径 1 的圆$(x-2)^2+y^2=1$,又∵$M$点在圆$C:(x+2)^2+y^2=1$上,∴$|PQ|$的最小值为$|C_1C|-1-1=2$.故选 B.

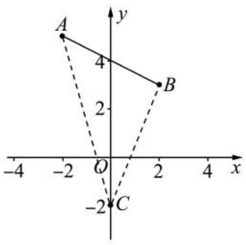
8.B 【解析】如图所示:设$|NF_2|=m$,因为$|MF_1|=3|NF_2|$,所以$|MF_1|=3m$.又因为$|MF_1|+|MF_2|=2a$,所以$|MF_2|=2a-3m$,即$|MN|=2a-2m$.因为$|NF_1|+|NF_2|=2a$,所以$|NF_1|=2a-m$.在$\mathrm{Rt}\triangle MF_1N$中,$(3m)^2+(2a-2m)^2=(2a-m)^2$,解得$m=\dfrac{a}{3}$,即$|MF_1|=|MF_2|=a$,所以$a^2+a^2=(2c)^2$,即$a^2=2c^2$.所以$e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$,$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.故选 B.



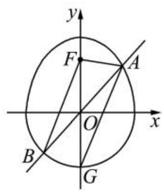
9.AC 【解析】对于 A,因为$(2,0,-1)=-\dfrac{1}{2}\cdot(-4,0,2)$,即$\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$,且$l_1$,$l_2$不重合,所以$l_1/\!/l_2$,A 正确;对

于B,因为$\frac{1}{6}\neq\frac{-1}{4}$,所以直线的方向向量$\boldsymbol{c}$与平面的法向量$\boldsymbol{m}$不平行,所以直线$l$和平面$\alpha$不垂直,故B选项错误;对于C,因为$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$,所以两个平面的法向量垂直,所以$\alpha\perp\beta$,C选项正确;对于D,不妨设直线$l$和平面$\alpha$所成角为$\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,则$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{d},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{d}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,所以$\theta=\frac{\pi}{6}$,D选项错误.故选AC.

10.AD 【解析】直线l的一个方向向量是$\boldsymbol{m}=(3,\sqrt{3})$,则直线$l$的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,故直线倾斜角为$\frac{\pi}{6}$,故A正确.若直线$l$与$x$轴交于点$A$,其倾斜角为$\theta$,直线$l$绕点$A$顺时针旋转$\frac{\pi}{4}$后得直线$l_1$,当$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta<\pi$时,直线$l_1$的倾斜角为$\theta-\frac{\pi}{4}$,当$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{4}$时,直线$l_1$的倾斜角为$\pi+\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\theta+\frac{3\pi}{4}$,故B错误.若直线$l_1,l_2$的倾斜角分别为$\theta_1,\theta_2$,则$0\leqslant\theta_1<\pi,0\leqslant\theta_2<\pi,-\pi<-\theta_2\leqslant0$,$\therefore-\pi<\theta_1-\theta_2<\pi$,则$\sin(\theta_1-\theta_2)=1\Rightarrow\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow l_1\perp l_2$;当$l_1\perp l_2$时,$|\theta_1-\theta_2|=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta_1-\theta_2=\pm\frac{\pi}{2}$;故$\sin(\theta_1-\theta_2)=1$是$l_1\perp l_2$充分不必要条件,故C错误.实数$x,y$满足$y=-\frac{1}{2}x+4,-2\leqslant x\leqslant2$,设$A(-2,5),B(2,3)$,则代数式$\frac{y+2}{x}=\frac{y-(-2)}{x-0}$表示线段$AB$上任意一点$(x,y)$和点$C(0,-2)$连线的斜率,由图可知,$\frac{y+2}{x}=\frac{y-(-2)}{x-0}\in\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$,故D正确.故选AD.



11.BC 【解析】对于A,$\because$半圆圆心在原点,所在圆过点$F(0,2)$,$\therefore$半圆的半径$r=2$,又椭圆短轴为半圆的直径,$\therefore2b=2r=4$,即$b=2$,又$c=2$,$\therefore a^2=b^2+c^2=8$,即$a=2\sqrt{2}$,$\therefore$椭圆长轴长为$2a=4\sqrt{2}$,故A错误;对于B,$\because2\leqslant|OA|\leqslant2\sqrt{2},|OB|=2$,$\therefore|AB|=|OA|+|OB|\in[4,2+2\sqrt{2}]$,故B正确;对于C,由题意知$G(0,-2)$,则$G$为椭圆的下焦点,由椭圆定义知:$|AF|+|AG|=2a=4\sqrt{2}$,又$|FG|=4$,$\therefore\triangle AFG$的周长为$4+4\sqrt{2}$,故C正确;对于D,设$\angle AOF=\theta$,则$S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle BOF}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OF|\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}|OB|\cdot|OF|\cdot\sin(\pi-\theta)=|OA|\cdot\sin\theta+2\sin\theta$,当$\theta=\frac{\pi}{6}$时,$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}|OA|+1\leqslant\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}+1=\sqrt{2}+1<4$,故D错误.故选BC.

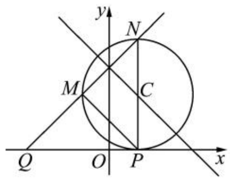


12.BCD 【解析】对于A,由$\lambda+\mu+\gamma=1$可知,点P在平面A_1BD内,所以$|PA|$的最小值即点A到平面A_1BD的距离,易得最小值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,故A错误;对于B,由$\lambda=1,\mu=\gamma$可知,点P在直线BC_1上,易知,$BC_1/\!/AD_1$,所以$BC_1/\!/$平面AB_1D_1,即$PB/\!/$平面AB_1D_1,故B正确;对于C,由$\lambda=\mu=1,\gamma=\frac{1}{2}$可知,点$P$为线段$CC_1$的中点,取$BD$中点为$O$,连接$PO,A_1O$,可得$\angle POA_1$为二面角$P-BD-A_1$的平面角,根据勾股定理可得$\angle POA_1=\frac{\pi}{2}$,故平面$PBD\perp$平面$A_1BD$,C正确;对于D,以$\{AB,AD,AA_1\}$为基底建立空间直角坐标系,易得$P(\lambda,\mu,0)$,又$\lambda\mu=1$,可知点$P$在平面$xyA$内,易知$|PA|\geqslant\sqrt{2}$,所以直线$PA_1$与平面$A_1B_1C_1D_1$所成角的正切值为$\frac{|AA_1|}{|PA|}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,D正确.

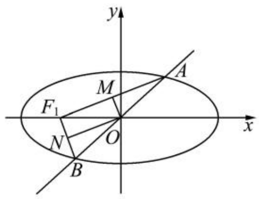
13.$4\sqrt{5}$　【解析】设椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点坐标为$(\pm c,0)$，则$c=\sqrt{25-9}=4$，设过点$(\sqrt{5},\sqrt{3})$，且与椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$有相同焦点的椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-16}=1$，则$\frac{(\sqrt{5})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2-16}=1$，解得$a=2\sqrt{5}$.故答案为$4\sqrt{5}$.

14.$\frac{10}{3}$　【解析】平面α经过原点O，且法向量为$\boldsymbol{n}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{OP}=(1,2,3)$，则点$P$到平面$\alpha$的距离为$\frac{|\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{10}{3}$.故答案为$\frac{10}{3}$.

15.$(x-1)^2+(y-2)^2=4$　【解析】由题意可知，点P为过M,N两点且和x轴相切的圆的切点，线段MN中点坐标为$(0,3)$，又$k_{MN}=\frac{2-4}{-1-1}=1$，所以直线$MN$所在直线的方程为$y=x+3$，$Q$点坐标$(-3,0)$，线段$MN$的垂直平分线方程为$y-3=-x$，所以以$MN$为弦的圆的圆心在直线$y-3=-x$上，故设该圆圆心为$C(a,3-a)$，又因为该圆与$x$轴相切，所以圆的半径$r=|3-a|$，又$|CN|=r$，所以$(a-1)^2+(3-a-4)^2=(3-a)^2$，解得$a=1$或$a=-7$，当$a=-7$时，切点$P$坐标$(-7,0)$，处于射线$QP$之外，故舍去.当$a=1$时，符合题意，此时圆的方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=4$.



16.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　【解析】如图所示，当点M,N分别是AF_1,BF_1的中点时，OM,ON是$\triangle ABF_1$的两条中位线，若以MN为直径的圆过原点，则有$OM\perp ON$，$AF_1\perp BF_1$.设点$A(x_0,y_0)$，则点$B(-x_0,-y_0)$，又点$F_1(-c,0)$，所以$\overrightarrow{AF_1}=(-c-x_0,-y_0)$，$\overrightarrow{BF_1}=(-c+x_0,y_0)$，则$\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{AF_1}=c^2-x_0^2-y_0^2=0$.又$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，化简得$x_0^2=\frac{a^2(c^2-b^2)}{c^2}$，即只需$0\leqslant\frac{a^2(c^2-b^2)}{c^2}<a^2$，整理得$2c^2\geqslant a^2$，解得$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e$，所以e的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.故答案为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.



17.**解**：(1)由点$A(0,5)$，$B(1,3)$，可得直线AB的斜率为$k_{AB}=\frac{3-5}{1-0}=-2$，……………………………… 2分

所以直线AB的方程为$y-5=-2(x-0)$，即$2x+y-5=0$. …………………………………………… 4分

(2)存在.设点C的坐标为$C(a,2a)$，AB的方程为$2x+y-5=0$，

根据点到直线的距离公式，可得$d=\frac{|2\times a+2a-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|4a-5|}{\sqrt{5}}$，……………………………………… 6分

由点$A(0,5)$，$B(1,3)$，得$|AB|=\sqrt{5}$，……………………………………………………………… 7分

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}d|AB|=\frac{1}{2}\times\frac{|4a-5|}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}=2$，解得$a=\frac{1}{4}$或$a=\frac{9}{4}$，……………………………………… 9分

则$C\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$或$C\left(\frac{9}{4},\frac{9}{2}\right)$. …………………………………………………………………………… 10分

18.(1)**证明**：$\because PB\perp$底面$ABCD$，$CD\subset$底面$ABCD$，

$\therefore PB\perp CD$.

$\because PD\perp CD$，$PB\cap PD=P$，$PB,PD\subset$平面PBD，

$\therefore CD\perp$平面PBD.

$\because BD\subset$平面PBD，

$\therefore BD\perp CD$. ………………………………………………………………………… 2 分

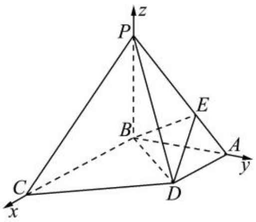
$\because$ 底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD/\!/BC$，$AB\perp BC$，$AB=AD=1$，

$\therefore$ 在等腰直角三角形 ABD 中，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2}$，$\angle ABD=\frac{\pi}{4}$，

在直角三角形 CBD 中，$\angle CBD=\frac{\pi}{4}$，$BC=\dfrac{BD}{\cos\frac{\pi}{4}}=2$，………………………………… 4 分

建立以 B 为原点的空间直角坐标系 $B-xyz$，如图所示：

则 $P(0,0,1)$，$A(0,1,0)$，$B(0,0,0)$，$C(2,0,0)$，$D(1,1,0)$.



从而$\overrightarrow{BP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{PA}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{BD}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{PC}=(2,0,-1)$，

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{BP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}=\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. ………………………………………… 6 分

设平面 EBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=x+y=0,\end{cases}$ 取 $z=2$，则 $x=1$，$y=-1$，

所以平面 EBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$，………………………………………… 8 分

$\because\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=0$，且 $PC\not\subset$ 平面 EBD，

$\therefore PC/\!/$ 平面 EBD. ………………………………………………………………………… 10 分

(2)**解**：设直线 PD 与平面 EBD 所成角的大小为 θ，

$\because\overrightarrow{PD}=(1,1,-1)$，

$\therefore\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PD},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PD}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

故直线 PD 与平面 EBD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………… 12 分

19.**解**：(1)当 $t=0$ 时，$P(-1,0)$，设圆 P 的方程为$(x+1)^2+y^2=r^2$，

因为$(-1-2)^2+0^2=9>4$，所以点 P 在圆外，………………………………………… 1 分

所以圆 P 与圆 M 外切或内切. ………………………………………………………… 2 分

又 $M(2,0)$，圆 M 的半径为 2.

当两圆外切时：$|PM|=2+r=|2-(-1)|$，可得 $r=1$；………………………………… 3 分

当两圆内切时：$|PM|=r-2=|2-(-1)|$，可得 $r=5$. ………………………………… 4 分

所以以 P 为圆心且与圆 M 相切的圆的方程为$(x+1)^2+y^2=1$ 或$(x+1)^2+y^2=25$. ……… 6 分

(2)若过点 $P(-1,t)$的直线与 x 轴垂直时，直线方程为 $x=-1$，

圆心 M 到直线 $x=-1$ 的距离为 3，直线与圆相离，不合题意. ……………………………… 7 分

设过点 P 的直线方程为 $y-t=k(x+1)$，即 $kx-y+k+t=0$，

由题意得，$\dfrac{|3k+t|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，

化简得 $8k^2+6tk+t^2-1=0$，$\Delta=36t^2-32(t^2-1)=4t^2+32>0$. ………………………… 8 分

设直线 PS，PT 的斜率分别为 k_1，k_2，

则 $\begin{cases}k_1+k_2=-\dfrac{3t}{4},\\ k_1k_2=\dfrac{t^2-1}{8}.\end{cases}$ ………………………………………………………… 9 分

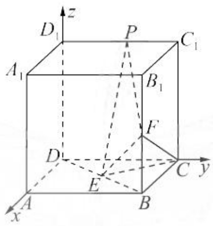
对过点 P 的直线 $y-t=k(x+1)$，令 $x=0$，得 $y=k+t$，

$\therefore S(0,k_1+t)$，$T(0,k_2+t)$，………………………………………………………… 10 分

$\therefore |ST|=|k_1-k_2|=\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}=\dfrac{\sqrt{t^2+8}}{4}=\dfrac{3}{4}$，解得 $t=\pm1$，

所以 $t=\pm1$. ………………………………………………………………………… 12 分

20.(1)**证明**：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 E，F 分别为 BD 和 BB_1 的中点，P 为棱 C_1D_1 上的动点，

则 $E(1,1,0)$，$F(2,2,1)$，$C(0,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，

设 $P(0,t,2)$，$(0\leqslant t\leqslant 2)$，

则 $\overrightarrow{CE}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{CF}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{D_1E}=(1,1,-2)$，…………………………………… 3 分

显然，$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{D_1E}=0$，即 $D_1E\perp CF$，

又 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{D_1E}=0$，

此时有 $D_1E\perp CE$， ………………………………………………………………… 5 分

而 $CE\cap CF=C$，且 CE，$CF\subset$ 平面 CEF，因此，$D_1E\perp$ 平面 EFC. …………………………… 6 分

(2)**解**：存在.在(1)的空间直角坐标系中，$\overrightarrow{EF}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{PE}=(1,1-t,-2)$.

令平面 PEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=x+y+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=x+(1-t)y-2z=0,\end{cases}$ 令 $y=3$，得 $\boldsymbol{n}=(t-3,3,-t)$，………………………… 8 分

而平面 BCC_1B_1 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$， ……………………………………………… 9 分

设平面 BCC_1B_1 与平面 PEF 所成锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{(t-3)^2+9+t^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{2}}}\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

当且仅当 $t=\frac{3}{2}$ 时取等号，因此，当 $t=\frac{3}{2}$，即 $P\left(0,\frac{3}{2},2\right)$ 时，$(\cos\theta)_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，…………………………… 10 分

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时取等号，

所以当 $P\left(0,\frac{3}{2},2\right)$，即 $C_1P=\frac{1}{2}$ 时，

平面 BCC_1B_1 与平面 PEF 所成锐二面角的正弦值最小。…………………………… 12 分

21. 解：(1)设 $M(x,y)$，由 $\frac{|MO|}{|MA|}=\frac{1}{2}$，得 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$， …………………………… 2 分

化简得 $x^2+y^2+2x-3=0$，即 $(x+1)^2+y^2=4$，…………………………… 3 分

故曲线 C 是以 $(-1,0)$ 为圆心，2 为半径的圆. …………………………… 4 分

(2)由(1)知 $C(-1,0)$，又 $P(3,p)(p\neq0)$，

则线段 CP 的中点的坐标为 $\left(1,\frac{p}{2}\right)$，$|CP|=\sqrt{16+p^2}$，

故以线段 CP 为直径的圆的方程为 $(x-1)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{16+p^2}}{2}\right)^2$，

整理得 $x^2+y^2-2x-py-3=0$①. …………………………… 5 分

由题意知，Q，R 在以 CP 为直径的圆上，

又 Q，R 在圆 $x^2+y^2+2x-3=0$②上，

由②－①，得 $4x+py=0$，

所以弦 QR 所在直线的方程为 $4x+py=0$，可得 QR 恒过坐标原点 $O(0,0)$. …………………………… 6 分

由 $\begin{cases}4x+py=0,\\(x+1)^2+y^2=4,\end{cases}$ 得 $(16+p^2)y^2-8py-48=0$，

设 $Q(x_1,y_1)$，$R(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{8p}{16+p^2}$，

所以点 N 的纵坐标 $y_N=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4p}{16+p^2}$.

因为 $p\neq0$，所以 $y_N\neq0$，所以点 N 与点 $C(-1,0)$，$O(0,0)$ 均不重合.

因为 N 为弦 QR 的中点，且 $C(-1,0)$ 为圆 C 的圆心，所以 $CN\perp QR$，即 $CN\perp ON$，

所以点 N 在以 OC 为直径的圆上，该圆的圆心为 $G\left(-\frac{1}{2},0\right)$，半径为 $\frac{1}{2}$. …………………………… 7 分

因为直线 $3x+4y=6$ 分别与 x 轴，y 轴交于点 E，F，

所以 $E(2,0)$，$F\left(0,\frac{3}{2}\right)$，因此 $|EF|=\frac{5}{2}$，

圆心 $G\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 到直线 $3x+4y=6$ 的距离 $d=\frac{\left|3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times0-6\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{2}$. …………………………… 8 分

设 $\triangle NEF$ 的边 EF 上的高为 h，

则点 N 到直线 $3x+4y=6$ 的距离 h 的最小值为 $d-r=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$， …………………………… 9 分

点 N 到直线 $3x+4y-6$ 的距离 h 的最大值为 $d+r=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$. ………………………… 10 分

所以 S 的最小值 $S_{\min}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times1=\frac{5}{4}$，最大值 $S_{\max}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times2=\frac{5}{2}$. ………………………… 11 分

因此 $\triangle NEF$ 的面积 S 的取值范围是 $\left[\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right]$. ………………………… 12 分

22. 解：(1)由题意可知，$|PF|+|PE|=|PM|+|PE|=|ME|=4>|EF|=2\sqrt{3}$，………………………… 2 分

所以点 P 轨迹是以 F，E 为焦点，4 为长轴长的椭圆，

所以曲线 C 的方程，即椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………… 4 分

(2)(ⅰ)由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消元得，$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

由 $\Delta=64k^2m^2-16(4k^2+1)(m^2-1)>0$，得 $4k^2-m^2+1>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$，………………………… 5 分

所以 $|OA|^2+|OB|^2=x_1^2+1-\frac{x_1^2}{4}+x_2^2+1-\frac{x_2^2}{4}=2+\frac{3}{4}(x_1^2+x_2^2)=2+\frac{3}{4}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]$

$=2+\frac{24k^2m^2-6m^2+24k^2+6}{(4k^2+1)^2}=2+\frac{6m^2(4k^2-1)+6(4k^2+1)}{(4k^2+1)^2}$，………………………… 6 分

当 $|OA|^2+|OB|^2$ 为定值时，即与 m^2 无关，

令 $4k^2-1=0$，得 $k=\pm\frac{1}{2}$，………………………… 7 分

此时 $|OA|^2+|OB|^2=5$ 恒成立，

即当 $k=\pm\frac{1}{2}$ 时，$|OA|^2+|OB|^2$ 为定值，且定值为 5. ………………………… 8 分

(ⅱ)设在 A 点处的切线方程为 $\frac{x_1x}{4}+y_1y=1$，①

同理可得，在 B 点处的切线方程为 $\frac{x_2x}{4}+y_2y=1$，② ………………………… 10 分

设 $Q(x_0,4-x_0)$，将其代入①②，得 $\frac{x_1x_0}{4}+y_1(4-x_0)=1$，$\frac{x_2x_0}{4}+y_2(4-x_0)=1$，

所以直线 l 的方程为 $\frac{xx_0}{4}+y(4-x_0)=1$，即 $\left(\frac{x}{4}-y\right)x_0+4y-1=0$，

令 $\begin{cases}\frac{x}{4}-y=0,\\ 4y-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\ y=\frac{1}{4},\end{cases}$

故直线 l 过定点，且定点坐标为 $\left(1,\frac{1}{4}\right)$. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。