

8. “顺德眼”是华南地区首座双立柱全拉索设计的摩天轮，总共设有 36 个等间距座舱，其中亲子座舱 4 个，每 2 个亲子座舱之间有 8 个普通座舱，摩天轮上的座舱运动可以近似地看作是质点在圆周上做匀速圆周运动，质点运行轨迹为圆弧，运行距离为弧长，“顺德眼”在旋转过程中，座舱每秒运行约 0.2 米，转一周大约需要 21 分钟，则两个相邻的亲子座舱在运行一周的过程中，距离地面的高度差的最大值约为(参考数据： $\frac{\sqrt{2}}{\pi} \approx$



0.45, 计算结果保留整数)

- A. 40 米 B. 50 米

C. 57 米

微信号: gdgkjzq
63 米

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列函数中，既是奇函数又是增函数的是

A. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

B. $f(x) = -\frac{1}{x}$

C. $f(x) = x^3 + x$

D. $f(x) = x - \sin x$

10. 已知 z 是模长为 1 的复数，则

A. $|\bar{z}| = 1$

B. $|\bar{z}^2| = z^2$

C. $z \cdot \bar{z} = 1$

D. $\frac{\bar{z} + 1}{z + 1} = \bar{z}$

11. 已知 e_1, e_2 是夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的单位向量，且 $a = e_1 + e_2, b = e_1 - e_2$ ，则

A. $a + b$ 在 b 上的投影向量为 b

B. $|b| = \sqrt{3}$

C. $(a \cdot e_1)e_2 = (a \cdot e_2)e_1$

D. $\langle a, b \rangle = \frac{2\pi}{3}$

12. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ ，对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ ，

且 $f(1) = \frac{1}{2}$ ，则

A. $f(0) = 0$ 或 1

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(3n) = -1, n \in \mathbf{N}^*$

D. $\sum_{n=1}^{1012} f(2n-1) = \frac{1}{2}, n \in \mathbf{N}^*$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_n = \cos \frac{2n\pi}{3}$ ，则 $S_{2023} =$ _____.

14. 已知向量 $a = (m, 1), b = (m, -2)$ ，若 $|a - b| = |a + b|$ ，则 $|a| =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \cos(x + \varphi)$ ($\varphi > 0$) 在区间 $[0, \varphi]$ 上的值域为 $[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ，则 $\varphi =$ _____.

16. 已知不等式 $e^{2x} - x^2 + (a-2)x - 1 > a \ln(x+1)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 C 为锐角，且 $\sin^2 C + \cos 2C = \frac{3}{4}$ 。

(1) 求角 C 的大小；

(2) 若 $b=6, c=2\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

18. (12分)

已知 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列， $\{b_n\}$ 是公比为2的等比数列，且 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = b_4 - a_4$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $c_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，记 T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，求 T_{20} 。

19. (12分)

设 a, b 为实数，且 $a > 0$ ，函数 $f(x) = ax - b \ln x - 1$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 设 $a = b = 1$ ，函数 $g(x) = xf(x)$ ，试问 $g(x)$ 是否存在极小值点？若存在，求出 $g(x)$ 的极小值点；若不存在，请说明理由。

20. (12分)

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 1$, $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 1 的等差数列.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 b_m 为数列 $\{a_n\}$ 落在区间 $(2^m, 2^{m+1})$, $m \in \mathbb{N}^*$ 内的项数. 在 a_m 和 a_{m+1} 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数构成等差数列, 记这个等差数列的公差为 d . 求数列 $\{d\}$ 的前 n 项和 T_n .



21. (12分)

如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \frac{3\pi}{4}$, $AB = 2\sqrt{2}$, $AD = 1$, $AD \perp CD$.

- (1) 若 $CD = \frac{4}{3}$, 求 BC ;
- (2) 求 $\tan \angle ACB$ 的最大值.



22. (12分)

已知函数 $f(x) = x \sin x + \cos x + 1$.

- (1) 求 $f(x)$ 的极值点;
- (2) 若 $f(x_i) = 0$ ($i \in \mathbb{N}^*$ 且 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i$), 证明: 对一切 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有

(i) $\frac{(4n-1)\pi}{2} < x_{2n} < \frac{(4n+1)\pi}{2}$

(ii) $\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_3 x_4} + \dots + \frac{1}{x_{2n-1} x_{2n}} < \frac{1}{\pi^2}$

