盐城市2024届高三年级第一学期期中考试

数学试题

（本试卷满分150分，考试时间120分钟）

注意事项：

1．本试卷考试时间为120分钟，试卷满分150分，考试形式闭卷.

2．本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置，否则不给分.

3．答题前，务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水签字笔填

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合$P=\{x|y=\sqrt{x^2-1}\}$，$Q=\{y|y=\sqrt{x^2-1}\}$，则$P\cap Q=$

A．$\varnothing$　　B．$[0,+\infty)$　　C．$[-1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

【答案】

【解析】$P=\{x|x\le -1或x\ge 1\}$，$Q=\{y|y\ge 0\}$，$P\cap Q=[1,+\infty)$，选D.

2．若复数z满足$z\bar{z}=2$，则$|z|$为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

【答

【解析】$z\bar{z}=2$，则$|z||\bar{z}|=2$，$\therefore |z|=\sqrt{2}$，选B.

3．数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n^2$，$n\in N^*$，则“$a_1=2$”是“$\{a_n\}$为单调递增数列”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

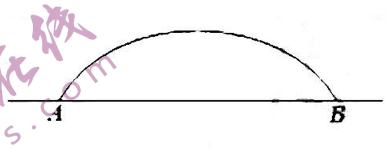
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】$a_1=2$，则$\{a_n\}$一定是单调增数列，充分.

$\{a_n\}$是单调增数列，则a_1不一定是2，不必要，选 A.

4．如图，某炮兵从地平面A处发射一枚炮弹至地平面的另一处B，假设炮弹的初始速度为v_0，发射方向与地平面所成角为$\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，根据物理知识可知，在不计空气阻力的情况下，炮弹飞行过程中的水平距离$x=(v_0\cos\alpha)t$，竖直距离$y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2$，其中$t$为炮弹的飞行时间，$g$为重力加速度，对于给定的初始速度$v_0$，要使炮弹落地点的水平距离$AB$最大，则发射角$\alpha$应为



A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{12}$

【答案】B

【解析】$y_B=(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2=0$，$\therefore t=\frac{v_0\sin\alpha}{\frac{1}{2}g}$

$x_B=(v_0\cos\alpha)t=\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{2}g}=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$，当$2\alpha=\frac{\pi}{2}$

即$\alpha=\frac{\pi}{4}$时，AB取最大值，选 B.

5．若函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$上单调，则$\omega$的取值范围是

A．$(1,+\infty)$　　B．$[1,+\infty)$　　C．$(0,1)$　　D．$(0,1]$

【答案】D

【解析】$0<x<\frac{\pi}{3}$，则$\frac{\pi}{6}<\omega x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}$，$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$单调，则$\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}$

$\therefore 0<\omega\le1$，选 D.

6．在各项为正数的无穷等差数列$\{a_n\}$中，公差$d\neq 0$，若数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，

则

A．$S_{2n}=\dfrac{2n}{a_{n+1}^2}$　　B．$S_{2n}>\dfrac{2n}{a_{n+1}^2}$　　C．$S_{2n}<\dfrac{2n}{a_{n+1}^2}$　　D．以上均不对

【答案】B

【解析】$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$　$S_{2n}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{2n+1}}\right)=\dfrac{1}{d}\dfrac{2nd}{a_1a_{2n+1}}=\dfrac{2n}{a_1a_{2n+1}}$

$\{a_n\}$为各项为正数的无穷等差数列，$d>0$，$a_{2n+1}>a_1>0$，$a_{2n+1}^2>a_1a_{2n+1}$，

$S_{2n}=\dfrac{2n}{a_1a_{2n+1}}>\dfrac{2n}{a_{2n+1}^2}$，选B.

7．若$x>0$，$y>1$，则$\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x^3}{y-1}$的最小值为

A．1　　B．4　　C．8　　D．12

【答案】C

【解析】$\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x^3}{y-1}=t$，则$4y^2-(4+tx)y+x^4+tx=0$，

$\Delta\geq 0$，$\therefore(4+tx)^2-16(x^4+tx)\geq 0$，$(tx-4)^2\geq 16x^4$，$tx-4\geq 4x^2$

$t\geq 4x+\dfrac{4}{x}\geq 8$，选C.

8．已知$a=2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}$，$b=\dfrac{1}{2}\ln 2$，$c=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则

A．$b>c>a$　　B．$b>a>c$　　C．$a>b>c$　　D．$c>b>a$

【答案】C

【解析】$a^2=2^{\frac{1}{2}}-2+2^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-2=\sqrt{2}\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$

$c^2=1-\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}<a^2$，$\therefore c<a$.在B，C中选，比较$a,b$大小.

$x>1$时$\ln x<\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，则$\ln 2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}$，即$b<a$，选C.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．在复数范围内，方程$x^2+x+1=0$的两根记为x_1,x_2，则

A．$x_1+x_2=1$　　B．$x_1x_2=1$

C．$|x_1-x_2|=\sqrt{3}$　　D．$x_1-x_2=\pm\sqrt{3}$

【答案】BC

【解析】$x_1+x_2=-1$，$x_1x_2=1$，A错，B对.

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1-4=-3$，$|x_1-x_2|=\sqrt{3}$，C对.

$x_1-x_2=\pm\sqrt{3}i$，D错，选BC.

10．在$\triangle ABC$中，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=4$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=4$，则

A．$B=\dfrac{\pi}{3}$　　B．$A=\dfrac{\pi}{2}$

C．$AC=2\sqrt{3}$　　D．$\triangle ABC$的面积为$4\sqrt{3}$

【答案】ABC

【解析】$\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$，$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$A=\dfrac{\pi}{2}$，B对.$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B=BA^2=4$，$BA=2$，$BC=4$，$AC=2\sqrt{3}$，A对，C对，

$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$，D错.选ABC.

11．已知数列$\{a_n\}$满足$a_n+2a_{n-1}=k^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 2$，则

A．当$k=0$且$a_1\neq 0$时，$\{a_n\}$是等比数列

B．当$k=1$时，$\left\{a_n-\dfrac{1}{3}\right\}$是等比数列

C．当$k=-2$时，$\left\{\dfrac{a_n}{(-2)^n}\right\}$是等差数列

D．当$k=-3$且$a_1=-3$时，$\left\{\dfrac{a_n}{(-3)^n}-3\right\}$是等比数列

【答案】ACD

【解析】对于A，$a_n+2a_{n-1}=0$，$a_n=-2a_{n-1}$，$a_1\neq 0$，$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=-2$，$\therefore \{a_n\}$为等比数列，A对.

对于B，$a_n+2a_{n-1}=1$，$\therefore a_n=-2a_{n-1}+1$，$a_n-\dfrac{1}{3}=-2a_{n-1}+\dfrac{2}{3}=-2\left(a_{n-1}-\dfrac{1}{3}\right)$，

$a_1-\dfrac{1}{3}=0$时$\left\{a_n-\dfrac{1}{3}\right\}$不是等比数列，B错.

对于C，$a_n+2a_{n-1}=(-2)^n$，则$\dfrac{a_n}{(-2)^n}+\dfrac{2a_{n-1}}{(-2)^n}=1$，则$\dfrac{a_n}{(-2)^n}-\dfrac{a_{n-1}}{(-2)^{n-1}}=1$，

$\therefore \left\{\dfrac{a_n}{(-2)^n}\right\}$是以1为公差的等差数列，C对.

对于D，$a_n+2a_{n-1}=(-3)^n$，则$\dfrac{a_n}{(-3)^n}+\dfrac{2a_{n-1}}{(-3)^n}=1$，则$\dfrac{a_n}{(-3)^n}=-\dfrac{2a_{n-1}}{(-3)^n}+1$

$$\frac{a_n}{(-3)^n}-3=-\frac{2a_{n-1}}{(-3)^n}-2=\frac{2}{3}\left(-\frac{3a_{n-1}}{(-3)^n}-3\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{a_{n-1}}{(-3)^{n-1}}-3\right)$$

$\dfrac{a_1}{(-3)^1}-3=\dfrac{-3}{-3}-3=-2\neq 0$，$\therefore \left\{\dfrac{a_n}{(-3)^n}-3\right\}$是以$\dfrac{2}{3}$为公比的等比数列，D对，选ACD.

12．在$\triangle ABC$中，若$A=nB(n\in \mathbf{N}^*)$，则

A．对任意的$n\geq 2$，都有$\sin A<n\sin B$

B．对任意的$n\geq 2$，都有$\tan A<n\tan B$

C．存在n，使$\sin A>n\sin B$成立

D．存在n，使$\tan A>n\tan B$成立

【答案】AD

【解析】方法一：当$A=3B$时，$n=3$，取$B=\dfrac{\pi}{12}$，则$A=\dfrac{\pi}{4}$，$\tan A=1$，

$3\tan B=3(2-\sqrt{3})$，则 $\tan A>3\tan B$，B 错，D 对.

$\begin{cases}0<A<\pi\\0<B<\pi\\0<C<\pi\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}0<nB<\pi\\0<B<\pi\\0<\pi-B-nB<\pi\end{cases}$，$\therefore 0<B<\dfrac{\pi}{n+1}$，

$f(x)=\sin nx-n\sin x,0<x<\dfrac{\pi}{n+1}$，$f'(x)=n\cos nx-n\cos x=n(\cos nx-\cos x)<0$，

$f(x)$在$(0,\pi)\swarrow$，$\therefore f(x)<f(0)=0$，$\therefore \sin nB<n\sin B$，$\therefore \sin A<n\sin B$，A 对，C 错.

选 AD.

方法二：对于 A，由 $nB+B<\pi\Rightarrow 0<B<\dfrac{\pi}{n+1}$，$\therefore 0<B<nB<\dfrac{n\pi}{n+1}<\pi$，

构造 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，易知 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上$\swarrow$，$\therefore f(nB)<f(B)\Rightarrow\dfrac{\sin nB}{nB}<\dfrac{\sin B}{B}$

$\Rightarrow \sin nB<n\sin B$，即 $\sin A<n\sin B$，A 正确，C 错.

对于 B，取 $n=2$，$A<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $A\to\dfrac{\pi}{2}$，$B\to\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore \tan A\to+\infty$，$\tan A>n\tan B$，

B 错，D 正确.选：AD.

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．若不等式 $x^2-2x\le a$ 对任意 $a\in[0,3]$ 都成立，则实数 x 的取值范围为________.

【答案】$[0,2]$

【解析】$a\ge x^2-2x$ 对 $\forall a\in[0,3]$ 都成立，则 $0\ge x^2-2x$，$\therefore 0\le x\le 2$.

14．在$\triangle ABC$ 中，已知 $AB=3$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为________.

【答案】-8

【解析】$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\cdot AC\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=-\dfrac{9+16-9}{2}=-8$.

15．若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx(a,b\in\mathbf{R})$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$

$x_1+2x_3=x_2$ ，则$a+b$的最大值为________.

【答案】$\frac{1}{8}$

【解析】$f(x)=x(x^2+ax+b)=0$有三个根，其中有一个根为0，

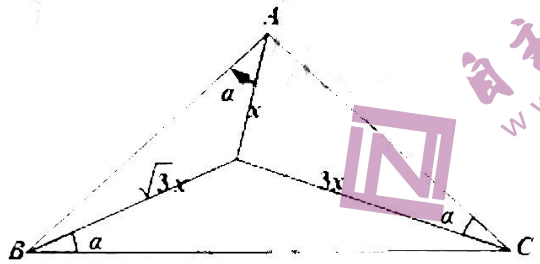
又$x_1<x_2<x_3$满足$x_1+2x_3=x_2$ ，则$x_2=0$ ，$\therefore x_1+2x_3=0$ ，x_1,x_3是$y=x^2+ax+b$的两根，则$x_1+x_3=-a$ ，$x_1x_3=b$ ，$\therefore a=x_3$　$b=-2x_3^2$

$a+b=-2x_3^2+x_3=-2\left(x_3^2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{8}\le\frac{1}{8}$.

16．若$\triangle ABC$内一点P满足$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$ ，则称点P为$\triangle ABC$的勃罗卡点，α为$\triangle ABC$的勃罗卡角.在等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC$ ，若勃罗卡点P满足$\frac{PB}{PA}=\frac{PC}{PB}=\sqrt{3}$ ，则$\angle ABC$与勃罗卡角α的正切值分别为________、________.（第1空2分，第2空3分）

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$；$\frac{\sqrt{3}}{5}$

【解析】设$PA=x$，则$PB=\sqrt{3}x$，$PC=3x$，令$AB=AC=y$



则$3x^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha$，$x^2=9x^2+y^2-6xy\cos\alpha$，

则$\begin{cases}-2x^2+y^2-2xy\cos\alpha=0\\8x^2+y^2-6xy\cos\alpha=0\end{cases}$，$\begin{cases}-6x^2+3y^2-6xy\cos\alpha=0\\8x^2+y^2-6xy\cos\alpha=0\end{cases}$

$\therefore 14x^2-2y^2=0$，$\therefore y=\sqrt{7}x$.

$$\cos\alpha=\frac{9x^2+7x^2-x^2}{2\cdot3x\sqrt{7}x}=\frac{15x^2}{6\sqrt{7}x^2}=\frac{15}{6\sqrt{7}}=\frac{5}{2\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$$

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{5\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$，$\cos\angle PAC=\dfrac{x^2+7x^2-9x^2}{2\cdot x\sqrt{7}x}=\dfrac{-x^2}{2\sqrt{7}x^2}=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

$\sin\angle PAC=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，$\tan\angle PAC=-3\sqrt{3}$

$$\tan\angle BAC=\tan(\alpha+\angle PAC)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{5}-3\sqrt{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot3\sqrt{3}}=\frac{-\frac{14\sqrt{3}}{5}}{\frac{14}{5}}=-\sqrt{3}$$

$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{6}$，$\tan\angle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）已知奇函数 $f(x)$ 与偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x$.

（1）求 $g(x)$ 的最小值；

（2）求函数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的值域.

【解析】

（1）$\because f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x$ ①，

$\therefore f(-x)+g(-x)=\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow -f(x)+g(x)=\mathrm{e}^{-x}$ ②，

$\therefore \begin{cases} f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} \\ g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2} \end{cases}$，$g(x)\geq 1$，$g(x)_{\min}=1$.

（2）$\therefore h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=1-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}$

$\because \mathrm{e}^{2x}+1>1$，$\therefore 0<\dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}<2$，$\therefore -1<h(x)<1$

即 $h(x)$ 的值域为 $(-1,1)$.

18．（12 分）已知正项递增等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n，且 $S_3=91$，$a_1a_3=81$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记a_n的个位数为b_n，求数列$\{a_nb_n\}$的前$2n$项和T_{2n}.

【解析】

（1）$\because$等比数列$\{a_n\}$正项递增，设$\{a_n\}$公比为q，$q>1$，

$\therefore a_1+a_2+a_3=91$，且$a_1a_3=a_2^2=81$，$a_2=9$，$\therefore a_1+a_3=82$，

$\therefore \frac{9}{q}+9q=82 \Rightarrow 9q^2-82q+9=0 \Rightarrow q=9$.

（2）$a_n=9^{n-1}$，$b_{2n-1}=1$，$b_{2n}=9$，

$\therefore a_{2n-1}b_{2n-1}+a_{2n}b_{2n}=9^{2n-2}+9^{2n-1}\cdot 9=82\cdot 9^{2n-2}$

$\therefore T_{2n}=\frac{82(1-81^n)}{1-81}=\frac{41}{40}(81^n-1)$.

19.（12分）若函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$在$(0,\pi)$上恰有两个零点，其中$\omega\in\mathbf{N}^*$

（1）求ω的值；

（2）若$f(x)=\frac{6}{5}$，求$\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right|$的值.

【解析】

（1）$\because 0<x<\pi$，$\therefore \frac{\pi}{3}<\omega x+\frac{\pi}{3}<\omega\pi+\frac{\pi}{3}$，

$\because f(x)$在$(0,\pi)$上恰有两个零点，

$\therefore 2\pi<\omega\pi+\frac{\pi}{3}\le 3\pi \Rightarrow \frac{5}{3}<\omega\le\frac{8}{3}$，

$\because \omega\in\mathbf{N}^*$，$\therefore \omega=2$.

（2）$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6}{5}$，$\therefore \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$，

$\therefore \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}\Rightarrow 1-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}\Rightarrow\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

20.（12分）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c，且满足$c=2\sqrt{2}$

$(2a+c)\cos B+b\cos C=0$.

（1）若$A=\dfrac{\pi}{4}$，求$\triangle ABC$的面积；

（2）若点D满足$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$，$\triangle BCD$的面积是$2\sqrt{6}$，求$\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CBD}$的值.

【解析】

（1）$\because(2a+c)\cos B+b\cos C=0\Rightarrow(2\sin A+\sin C)\cos B+\sin B\cos C=0$，

$\therefore 2\sin A\cos B+\sin(B+C)=0\Rightarrow 2\sin A\cos B+\sin A=0$

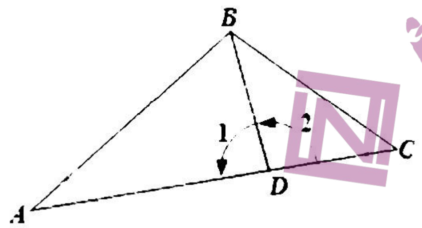
$\cos B=-\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{2\pi}{3}$.$\because A=\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{12}$

$\therefore\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}\Rightarrow\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow a=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6+2\sqrt{3}$.

（2）$\because S_{\triangle BCD}=2\sqrt{6}$，$AD=2DC$，$\therefore S_{\triangle ABC}=6\sqrt{6}$

$\therefore\dfrac{1}{2}a\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{6}\Rightarrow a=12$.



在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中分别由正弦定理$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}=\dfrac{AB}{\sin\angle 1} ①\\[2mm] \dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BC}{\sin\angle 2} ②\end{cases}$

$\dfrac{②}{①}\Rightarrow\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CBD}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{12}{2\sqrt{2}}\Rightarrow\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle CBD}=6\sqrt{2}$.

21.（12分）“太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦……”，“大衍数列”来源于《乾坤谱》，用于解释中国传统文化中的太极衍生原理.“大衍数列”$\{a_n\}$的前几项分别是：

$0,2,4,8,12,18,24,\cdots$，且$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}a_{n-1}+n,n=2k,\\a_{n-1}+n-1,n=2k+1,\end{cases}$其中$k\in\mathbf{N}^*$.

（1）求a_{2k}（用k表示）；

（2）设数列$\{b_n\}$满足：$b_n=\begin{cases}2a_n,n=2k,\\2a_n+1,n=2k-1,\end{cases}$其中$k\in\mathbf{N}^*$，$T_n$是$\{b_n\}$的前$n$项的积，求证：$\ln T_n\le n^2-n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

【解析】

（1）$a_{2k+2}=a_{2k+1}+2k+2=a_{2k}+2k+2k+2=a_{2k}+4k+2$

$\Rightarrow a_{2k+2}-a_{2k}=4k+2$，

$\therefore a_{2k}=a_2+a_4-a_2+a_6-a_4+\cdots+a_{2k}-a_{2k-2}$

$=2+6+10+\cdots+4k-2=\dfrac{4k\cdot k}{2}=2k^2$

（2）由（1）知$a_{2k}=2k^2$，$a_{2k-1}=a_{2k-2}+2k-2=2(k-1)^2+2k-2=2k^2-2k,k\ge2$

而$a_1=0$也满足上式，$\therefore a_{2k-1}=2k^2-2k$，$\therefore a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}n^2,n\text{为偶数}\\\dfrac{n^2-1}{2},n\text{为奇数}\end{cases}$

$\therefore b_n=\begin{cases}n^2,n=2k\\n^2,n=2k-1\end{cases}$，$\therefore b_n=n^2$，$\therefore T_n=(1\cdot2\cdot\cdots\cdot n)^2$，

$\ln T_n=2(\ln1+\ln2+\cdots+\ln n)$，而$\ln n\le n-1$（当且仅当$n=1$时取“=”）

$2(\ln1+\ln2+\cdots+\ln2)\le2\cdot\dfrac{(0+n-1)n}{2}=n^2-n,n\in\mathbf{N}^*$

$\therefore\ln T_n\le n^2-n,n\in\mathbf{N}^*$，证毕！

22．（12分）已知$f(x)=\mathrm{e}^x(1-x)$

（1）求函数$g(x)=f(x)+\mathrm{e}x-\mathrm{e}$的最大值；

（2）设$f(x_1)=f(x_2)=t$，$x_1\ne x_2$，求证：$x_1+x_2<2t-\dfrac{t}{\mathrm{e}}-1$.

【解析】

（1）$g(x)=(1-x)\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}x-\mathrm{e}$，$g'(x)=\mathrm{e}^{x}+(1-x)\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}=\mathrm{e}-x\mathrm{e}^{x}$

当$x<1$时，$g'(x)>0, g(x)\nearrow$；当$x>1$时，$g'(x)<0, g(x)\searrow$

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=0$．

（2）$f'(x)=\mathrm{e}^{x}(1-x)-\mathrm{e}^{x}=-x\mathrm{e}^{x}$

$f(x)$在$(-\infty,0)$上$\nearrow$；$(0,+\infty)$上$\swarrow$，$f(x)_{\max}=f(0)=1$，

由$f(x_1)=f(x_2)=t \Rightarrow x_1<0<x_2$（这里不妨设$x_1<x_2$），$t\in(0,1)$

且由（1）知$f(x)+\mathrm{e}x-\mathrm{e}\le 0$恒成立，$\therefore f(x_2)+\mathrm{e}x_2-\mathrm{e}\le 0$

$\Rightarrow t+\mathrm{e}x_2-\mathrm{e}\le 0$，$\therefore x_2\le 1-\dfrac{t}{\mathrm{e}}$

要证：$x_1+x_2<2t-\dfrac{t}{\mathrm{e}}-1$，只需证$x_1<2t-2$，

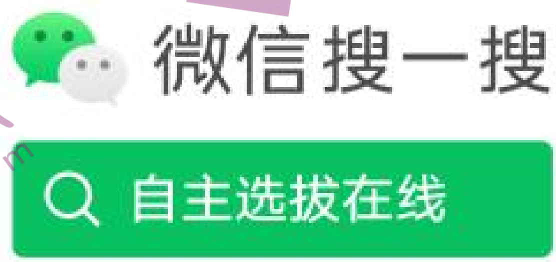
而$x_1, 2t-2\in(-\infty,0)$且$f(x)$在$(-\infty,0)$上$\nearrow$

$\Leftrightarrow$证：$f(x_1)<f(2t-2)$，即证：$t<\mathrm{e}^{2t-2}(3-2t)$

即证$\dfrac{\mathrm{e}^{2t-2}(3-2t)}{t}>1, t\in(0,1)$．

令$g(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{2t-2}(3-2t)}{\quad}$，$g'(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{2t-2}(-4t^{2}+6t-3)}{t^{2}}<0$

$\therefore g(t)$在$(0,1)$上$\swarrow$，$\therefore g(t)>g(1)=1$，证毕！


微信搜一搜
自主选拔在线