2023—2024 学年第一学期 11 月六校联合调研试题

高三数学

2023．11

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x|\log_2x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x^2-x-2<0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$(0，2)$　　B．$(-1，2)$　　C．$(-\infty，4]$　　D．$(-1，4]$

2．若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是夹角为 60° 的两个单位向量，$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $\lambda=$（　　）

A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{7}{8}$　　D．$\frac{7}{4}$

3．用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥，截得的圆台上底面半径为 1，下底面半径为 2，该圆台侧面积为 $3\sqrt{5}\pi$，则原圆锥的母线长为（　　）

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．4　　D．$2\sqrt{5}$

4．已知 x，y 取表中的数值，若 x，y 具有线性相关关系，线性回归方程为 $\hat{y}=0.95x+2.6$，则 $a=$（　　）

A．2.2　　B．2.4

C．2.5　　D．2.6

x	0	1	3	4
y	a	4.3	4.8	6.7

5．已知角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $(t，-1)$，若 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=$（　　）

A．-3　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{1}{3}$　　D．3

6．已知数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n=\begin{cases}3n^2-2tn+2，& n\leqslant 7\\ 4n+94，& n>7\end{cases}$，若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}>a_n$，则实数 t 的取值范围是（　　）

A．$t\in[3，+\infty)$　　B．$t\in[\frac{23}{14}，\frac{9}{2})$　　C．$t\in(\frac{23}{14}，\frac{9}{2})$　　D．$t\in[\frac{23}{14}，+\infty)$

7．已知圆 C_1：$x^2+y^2=b^2(b>0)$ 与双曲线 C_2：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，若在双曲线 C_2 上存在点 P，使得过点 P 所作的圆 C_1 的两条切线，切点为 A，B，且 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$，则双曲线 C_2 的离心率的取值范围是（　　）

A．$(1，\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　B．$[\frac{\sqrt{5}}{2}，+\infty)$　　C．$(1，\sqrt{3}]$　　D．$[\sqrt{3}，+\infty)$

8．定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=0$，$f(-x)=f(x+2)$；且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^3-x^2+x$．则方程 $4f(x)-x+2=0$ 所有的根之和为　（　　）

A．6　　B．12　　C．14　　D．10

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分．请把正确选项在答题卡中的相应位置涂黑．

9.已知复数 $z=2+i$，$z_1=x+yi(x, y\in \mathbf{R})$（i 为虚数单位），$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则下列结论正确的是　（　　）

A．$\bar{z}$ 的虚部为 $-i$　　B．z 对应的点在第一象限

C．$\frac{|\bar{z}|}{|z|}=1$　　D．若 $|z-z_1|\leq 1$，则在复平面内 z_1 对应的点形成的图形的面积为 2π

10．已知 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，则　（　　）

A．$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 4　　B．ab 的最大值为 $\frac{1}{8}$

C．a^2+b^2 的最小值为 $\frac{1}{5}$　　D．2^a+4^b 的最小值为 $2\sqrt{2}$

11．函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为单调函数，图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，则（　　）

A．$\omega=\frac{3}{4}$

B．将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，所得图象关于 y 轴对称

C．若函数 $f(x)$ 在区间 $(a, \frac{14\pi}{9})$ 上没有最小值，则实数 a 的取值范围是 $(-\frac{2\pi}{9}, \frac{14\pi}{9})$

D．若函数 $f(x)$ 在区间 $(a, \frac{14\pi}{9})$ 上有且仅有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是 $[-\frac{4\pi}{3}, 0)$

12．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆内部，点 Q 在椭圆上，椭圆 C 的离心率为 e，则以下说法正确的是　（　　）

A．离心率 e 的取值范围为 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$　　B．存在点 Q，使得 $\overrightarrow{QF_1}\cdot\overrightarrow{QF_2}=0$

C．当 $e=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，$|QF_1|+|QP|$ 的最大值为 $4+\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\frac{1}{|QF_1|}+\frac{1}{|QF_2|}$ 的最小值为 1

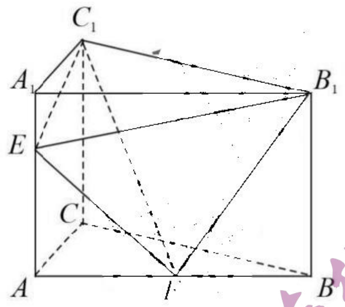
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．为全面推进乡村振兴，某市开展了“四季村晚”活动，晚会有《茉莉花》、《扬鞭催马运粮忙》、《数幸福》、《乡村振兴唱起来》四个节目，若要对这四个节目进行排序，要求《数幸福》与《乡村振兴唱起来》相邻，则不同的排列种数为________（用数字作答）．

14．设$(2x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0$，则$a_1+a_3+a_5=$________（用数字作答）．

15．现有一张正方形纸片，沿只过其一个顶点的一条直线将其剪开，得到 2 张纸片，再从中任选一张，沿只过其一个顶点的一条直线剪开，得到 3 张纸片，…，以此类推，每次从纸片中任选一张，沿只过其一个顶点的一条直线剪开，若经过 8 次剪纸后，得到的所有多边形纸片的边数总和为________．

16．如图，在直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，$AC\perp AB$，$AC=2$，$AA_1=4$，$AB=6$，点 E，F 分别是 AA_1，AB 上的动点，那么 $C_1E+EF+FB_1$ 的长度最小值是________，此时三棱锥 $B_1\text{-}C_1EF$ 外接球的表面积为________．（第一空 2 分，第二空 3 分）



四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分10分）已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为 S_n，$a_n^2+a_n=2S_n+2$

数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n\cdot 3^{a_n}$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

18．（本小题满分 12 分）在$\triangle ABC$中，A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $b^2=c(a+c)$．

（1）若 $B=\frac{\pi}{4}$，求$\frac{c}{a}$的值；

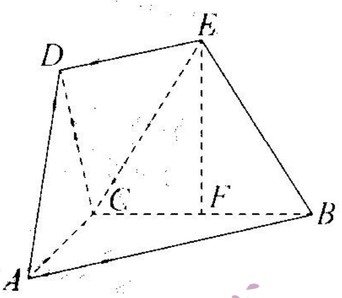
（2）若$\triangle ABC$是锐角三角形，求 $\sqrt{3}\sin B+2\cos^2C$ 的取值范围．

19.（本小题满分 12 分）为弘扬中国共产党百年奋斗的光辉历程，某校团委决定举办“中国共产党党史知识”竞赛活动．竞赛共有 A 和 B 两类试题，每类试题各 10 题，其中每答对 1 道 A 类试题得 10 分；每答对 1 道 B 类试题得 20 分，答错都不得分．每位参加竞赛的同学从这两类试题中共抽出 3 道题回答（每道题抽后不放回）．已知某同学 A 类试题中有 7 道题能答对，而他答对各道 B 类试题的概率均为$\frac{2}{3}$．

(1)若该同学只抽取 3 道 A 类试题作答，设 X 表示该同学答这 3 道试题的总得分，求 X 的分布和期望；

(2)若该同学在 A 类试题中只抽 1 道题作答，求他在这次竞赛中仅答对 1 道题的概率．

20.（本小题满分 12 分）已知在四棱锥 $C-ABED$ 中，$DE\parallel$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，$BC=2AC=4$，$AB=2DE$，$DA=DC$，点 F 为线段 BC 的中点，平面 $DAC\perp$ 平面 ABC．



（1）证明：$EF\perp$ 平面 ABC；

（2）若直线 BE 与平面 ABC 所成的角为 60°，求二面角 $B-AD-C$ 的余弦值．

21.（本小题满分 12 分）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$经过点 $P(4，6)$，且离心率为 2．

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）过点 P 作 y 轴的垂线，交直线 l：$x=1$ 于点 M，交 y 轴于点 N．设点 A，B 为双曲线 C 上的两个动点，直线 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，若 $k_1+k_2=2$，求$\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle NAB}}$．

22.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=e^x-\frac{a}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-2ax$．

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线方程；

（2）若在$[0，+\infty)$上单调递增，求 a 的取值范围；

（3）若 $f(x)$的最小值为 1，求 a 的值．

2023—2024学年第一学期11月六校联合调研试题

高三数学答案

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．

1~4：DBDA　　　　5~8：CCBD

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

9．BC　　10．BCD　　11．ABD　　12.ACD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．12　　14．-364　　15．28　　16．$8\sqrt{2}$；44π（第一空2分，第二空3分）

四、解答题：本大题共6小题，共70分

17.（1）$n=1$时，$a_1^2+a_1=2S_1+2$，$a_1^2-a_1-2=0$，$a_1=2$或$a_1=-1$（舍）……………2分

$n\ge 2$时，$a_n^2+a_n=2S_n+2$，$a_{n-1}^2+a_{n-1}=2S_{n-1}+2$．

两式相减得 $a_n^2-a_{n-1}^2-a_n-a_{n-1}=0$，……$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$

$\because \{a_n\}$为正项数列，$\therefore a_n-a_{n-1}=1$　　…………4分

数列$\{a_n\}$为等差数列，公差为1．　$\therefore a_n=a_1+(n-1)\times 1=n+1$　　……　5分

（2）$b_n=a_n\cdot 3^{a_n}=(n+1)\cdot 3^{n+1}$

$T_n=2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+4\cdot 3^4+\cdots+(n+1)\cdot 3^{n+1}+0$

$3T_n=0\quad+2\cdot 3^3+3\cdot 3^4+\cdots+n\cdot 3^{n+1}+(n+1)\cdot 3^{n+2}$　　…………7分

相减得$-2T_n=2\cdot 3^2+(3^3+3^4+\cdots+3^{n+1})-(n+1)\cdot 3^{n+2}=-\dfrac{9}{2}-(n+\dfrac{1}{2})\cdot 3^{n+2}$

$T_n=\dfrac{2n+1}{4}\cdot 3^{n+2}-\dfrac{9}{4}$　　…………10分

18.（1）在$\triangle ABC$中，$B=\dfrac{\pi}{4}$，据余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-\sqrt{2}ac$

又$b^2=c(a+c)$，故$a^2-\sqrt{2}ac=ac$，即$a^2=(\sqrt{2}+1)ac$，

又$a>0$，故$a=(\sqrt{2}+1)c$，得$\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}-1$．　　…………4分

（2）在△ABC 中，据余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

又 $b^2=c(a+c)$，故 $a^2-2ac\cos B=ac$，

又 $a>0$，故 $a-2c\cos B=c$

据正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，可得 $\sin A-2\sin C\cos B=\sin C$，

$\sin[\pi-(B+C)]-2\sin C\cos B=\sin C$，

$\sin B\cos C+\cos B\sin C-2\sin C\cos B=\sin C$，

$\sin(B-C)=\sin C$

因为 A，B，$C\in(0，\pi)$，所以 $B-C\in(-\pi，\pi)$，

则 $B-C=C$ 或 $B-C+C=\pi$，

即 $B=2C$ 或 $B=\pi$（舍）

所以 $\sqrt{3}\sin B+2\cos^2C=\sqrt{3}\sin 2C+\cos 2C+1=2\sin(2C+\frac{\pi}{6})+1$.

$A=\pi-(B+C)=\pi-3C$.

因为△ABC 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<\pi-3C<\dfrac{\pi}{2}\\0<2C<\dfrac{\pi}{2}\\0<C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，得 $\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{4}$，

$\dfrac{\pi}{2}<2C+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$，故 $\sin(2C+\frac{\pi}{6})\in(\frac{\sqrt{3}}{2}，1)$，$2\sin(2C+\frac{\pi}{6})+1\in(\sqrt{3}+1，3)$.

故 $\sqrt{3}\sin B+2\cos^2C\in(\sqrt{3}+1，3)$.

19.（1）$X\in\{0,10,20,30\}$

$P(X=0)=\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$，$P(X=10)=\dfrac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\dfrac{21}{120}=\dfrac{7}{40}$，

$P(X=10)=\dfrac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\dfrac{63}{120}=\dfrac{21}{40}$，$P(X=30)=\dfrac{C_7^3}{C_{10}^3}=\dfrac{35}{120}=\dfrac{7}{24}$

所以 X 的分布为

X	0	10	20	30
P	$\dfrac{1}{120}$	$\dfrac{7}{40}$	$\dfrac{21}{40}$	$\dfrac{7}{24}$

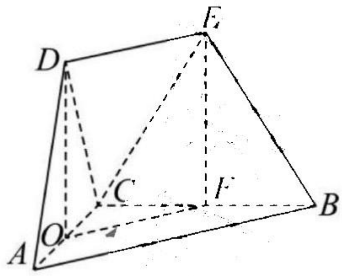
所以 $E(X)=0\times\frac{1}{120}+10\times\frac{7}{40}+20\times\frac{21}{40}+30\times\frac{7}{24}=21$ …………………8 分

（2）记“该同学仅答对 1 道题”为事件 M.

$P(M)=\frac{7}{10}\cdot(\frac{1}{3})^2+\frac{3}{10}\cdot C_2^1\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{19}{90}$

$\therefore$ 这次竞赛中该同学仅答对 1 道题得概率为 $\frac{19}{90}$. …………………12 分

20.（1）取 AC 的中点 O，连接 OF、OD，



$\because DE//$ 平面 ABC，$DE\subset$ 平面 ABED，平面 ABED $\cap$ 平面 ABC=AB

$\therefore DE//AB$ ……………………2 分

又$\because O$，F 分别为 AC，BC 的中点，$\therefore OF//AB$ 且 $OF=\frac{1}{2}AB$

$\because AB=2DE$ $\therefore OF\underline{\underline{//}}DE$ $\therefore$ 四边形 $DEFO$ 为平行四边形.$\therefore EF//DO$， ………………3 分

$\because$ 在 $\triangle DAC$ 中 $DA=DC$ 且 O 为 AC 中点，$\therefore DO\perp AC$.

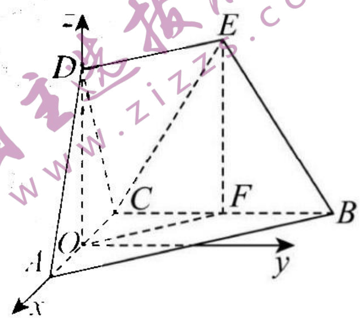
$\therefore$ 由平面 $DAC\perp$ 平面 ABC，且交线为 AC，$DO\subset$ 平面 DAC，得 $DO\perp$ 平面 ABC ……5 分

$\because AB$、$AC\subset$ 平面 ABC，$\therefore DO\perp AB$，$DO\perp AC$，$\because EF//DO$ $\therefore EF\perp AB$，$EF\perp AC$.

$\because AB\cap AC=A$，AB、$AC\subset$ 平面 ABC，$\therefore EF\perp$ 平面 ABC ………………6 分

注：由 $EF//DO$ 得 $EF\perp$ 平面 ABC”者，不扣分，但讲评时需告知学生要求。

（2）$\because DO\perp$ 平面 ABC，$AC,BC\subset ABC$ 平面，所以 $DO\perp AC,DO\perp BC$，



又因为 $AB\perp AC$，所以 DO，AC，BC 三者两两互相垂直，

$\therefore$ 以 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，过点 O 与 CB 平行的直线为 y 轴，

OD 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系.

则 $A(1,0,0)$，$C(-1,0,0)$，$B(-1,4,0)$.

$\because EF\perp$ 平面ABC，$\therefore$ 直线 BE 与平面 ABC 所成的角为 $\angle EBF=60^\circ$.

$\therefore DO=EF=BF\tan 60^\circ=2\sqrt{3}$ $\therefore D(0,0,2\sqrt{3})$. ……………………8 分

可取平面 ADC 的法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$，

设平面 ADB 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,4,0)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,2\sqrt{3})$，

则 $\begin{cases}-2x+4y=0\\-x+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取 $z=1$，则 $x=2\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}$.$\therefore \vec{n}=(2\sqrt{3},\sqrt{3},1)$，………………10 分

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore B-AD-C$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ………………12 分

21.（1）由题意得$\begin{cases}\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{36}{b^2}=1\\ \dfrac{c}{a}=2\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a^2=4\\ b^2=12\end{cases}$，

所以C的方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$； ………………4 分

（2）由题意，点M坐标为$(1,6)$，点N坐标为$(0,6)$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

方法一：

① 若直线AB斜率存在，设直线AB方程为$y=kx+m$，

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，消去$y$可得$(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-12=0$，

$3-k^2\neq0$且$\Delta=12(m^2-4k^2+12)>0$，

且$x_1+x_2=\dfrac{2km}{3-k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{m^2+12}{3-k^2}$， ………………6 分

$k_1+k_2=\dfrac{y_1-6}{x_1-4}+\dfrac{y_2-6}{x_2-4}=\dfrac{(kx_1+m-6)(x_2-4)+(kx_2+m-6)(x_1-4)}{(x_1-4)(x_2-4)}=2$，

整理可得$(m-4k+2)(x_1+x_2)+(2k-2)x_1x_2-8m+16=0$，

$(m-4k+2)\cdot\dfrac{2km}{3-k^2}+(2k-2)\cdot\left(-\dfrac{m^2+12}{3-k^2}\right)-8m+16=0$，

化简得$m^2-12m-8k^2-12k+2km+36=0$， ……………8 分

即$(m-2k-6)(m+4k-6)=0$，

因为直线AB不过点$P(4,6)$，所以$m+4k-6\neq0$，

所以$m-2k-6=0$，即$m=2k+6$，

所以直线AB的方程为$y=k(x+2)+6$，恒过定点$Q(-2,6)$， ……………10 分

②若直线 AB 斜率不存在，则 $x_1=x_2, y_1+y_2=0$，

$$k_1+k_2=\frac{y_1-6}{x_1-4}+\frac{y_2-6}{x_2-4}=\frac{y_1+y_2-12}{x_1-4}=\frac{-12}{x_1-4}=2,$$

解得 $x_1=x_2=-2$，所以直线 AB 的方程为 $x=-2$，AB 与双曲线仅有一个交点，舍，……11 分

综上，直线 AB 恒过定点 $Q(-2,6)$.

设点 M 到直线 AB 的距离为 d_1，点 N 到直线 AB 的距离为 d_2，

$$\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle NAB}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d_1}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d_2}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{MQ}{NQ}=\frac{3}{2}$$ ……………12 分

方法二：

因为直线 AB 不过点 $P(4,6)$，所以可设直线 AB 方程为 $m(x-4)+n(y-6)=1$，

由 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 可得 $\frac{[(x-4)+4]^2}{4}-\frac{[(y-6)+6]^2}{12}=1$

即 $(y-6)^2-3(x-4)^2+12(y-6)-24(x-4)=0$，

$(y-6)^2-3(x-4)^2-[12(y-6)-24(x-4)][m(x-4)+n(y-6)]=0$，

得 $(12n-1)(y-6)^2+(12m-24n)(x-4)(y-6)-(24m+3)(x-4)^2=0$，

等式左右两边同时除以 $(x-4)^2$，

得 $(12n+1)\left(\frac{y-6}{x-4}\right)^2+(12m-24n)\frac{y-6}{x-4}-(24m+3)=0$， ……………8 分

$\Delta=(12m-24n)^2+4(12n+1)(24m+3)>0$，

$k_1+k_2=\frac{y_1-6}{x_1-4}+\frac{y_2-6}{x_2-4}=-\frac{12m-24n}{12n+1}=2$，解得 $m=-\frac{1}{6}$， ……………10 分

所以直线 AB 方程为 $-\frac{1}{6}(x-4)+n(y-6)=1$，

即 $-(x+2)+6n(y-6)=0$，恒过定点 $Q(-2,6)$， ……………11 分

设点 M 到直线 AB 的距离为 d_1，点 N 到直线 AB 的距离为 d_2，

$$\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle NAB}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d_1}{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d_2}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{MQ}{NQ}=\frac{3}{2}.$$ ……………12分

22.（1） $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}$，

$f(1)=\mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$， ……………………………………………………………………1分

$f'(x)=\mathrm{e}^x-x$，

$f'(1)=\mathrm{e}-1$， ……………………………………………………………………2分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程 $y-(\mathrm{e}-\dfrac{1}{2})=(\mathrm{e}-1)(x-1)$，

即 $2(\mathrm{e}-1)x-2y+1=0$． ……………………………………………………………3分

（2）方法一：

因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x-ax^2-x-2a\geqslant 0$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $a\le\left(\dfrac{e^x-x}{x^2+2}\right)_{\min}$， ……………………………………………………4分

令 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-x}{x^2+2}$，则 $g'(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)(x^2+2)-(\mathrm{e}^x-x)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$， ……………………5分

令 $h(x)=(\mathrm{e}^x-1)(x^2+2)-(\mathrm{e}^x-x)\cdot 2x$，则 $h'(x)=x^2\mathrm{e}^x+2x$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 单调递增，$h(x)\geqslant h(0)=0$，

所以 $g'(x)\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 单调递增， ……………………………………………6分

$g(x)_{\min}=g(0)=\dfrac{1}{2}$，

所以 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$． ……………………………………………………………………7分

方法二：$f'(x)=\mathrm{e}^x-ax^2-x-2a\geqslant 0$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

由 $f'(0)=1-2a\geqslant 0$ 得，$a\leqslant\dfrac{1}{2}$． ……………………………………………………

当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f''(x)=\mathrm{e}^x-2ax-1$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$f'''(x)\geqslant 0$，$f''(x)$ 单调递增，$f''(x)\geqslant f''(0)=0$，

$f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)\geqslant f'(0)=1-2a\geqslant 0$，

所以，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增；……………………………………………………6分

综上，$a\leqslant\dfrac{1}{2}$．……………………………………………………………………

方法三：放缩法

$f'(x)=e^x-ax^2-x-2a\geqslant 0$ 区间 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

$a\leq\left(\dfrac{e^x-x}{x^2+2}\right)_{\min}$，……………………………………………………4分

令 $g(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$，则 $g'(x)=e^x-1-x$，……………………………………5分

$g''(x)=e^x-1$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$g''(x)\geqslant 0$，$g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$g'(x)\geqslant g'(0)=0$，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，……………………………………6分

$g(x)\geqslant g(0)=0$，所以 $e^x-x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}$，当 $x=0$ 时取等号，

所以 $\left(\dfrac{e^x-x}{x^2+2}\right)_{\min}=\dfrac{1}{2}$，

综上，$a\leqslant\dfrac{1}{2}$．……………………………………………………………………7分

（3）方法一：

$f(x)=e^x-\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}-2ax$，$f(0)=1$，……………………………………8分

$f'(x)=e^x-ax^2-x-2a$，$f'(0)=1-2a$，$f''(x)=e^x-2ax-1$，$f'''(x)=e^x-2a$，

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=e^x-\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{x^2}{2}-x$，$f'(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1$，

令 $g(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1$，则 $g'(x)=e^x-x-1$，$g''(x)=e^x-1$，

当 $x<0$ 时，$g''(x)<0$，$g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

当 $x\geqslant 0$ 时，$g''(x)\geqslant 0$，$g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$g'(x)\geqslant g'(0)=0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(0)=0$，

所以，当 $x<0$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=1$．

所以 $a=\frac{1}{2}$ 适合，……………………………………………………………………………………………9分

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，当 $0<x<\ln 2a$ 时，$f'''(x)<0$，

$f''(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减，$f''(x)<f''(0)=0$，

$f'(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减，

$f'(x)<f'(0)=1-2a<0$，$f(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减

此时，$f(x)<f(0)=1$，舍去. ……………………………………………………………………………10分

当 $a\leqslant 0$ 时，当 $x<0$ 时，$f''(x)=e^x-2ax-1<0$，

$f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$f'(x)>f'(0)=1-2a>0$，

$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，$f(x)<f(0)=1$，舍去；……………………………………………11分

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，当 $\ln 2a<x<0$ 时，$f'''(x)>0$，$f''(x)$ 在 $(\ln 2a,0)$ 上单调递增，

$f''(x)<f''(0)=0$，$f'(x)$ 在 $(\ln 2a,0)$ 上单调递减，

$f'(x)>f'(0)=1-2a>0$，$f(x)$ 在 $(\ln 2a,0)$ 上单调递增，

此时，$f(x)<f(0)=1$，舍去.

综上，$a=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………………12分

方法二：

$f(x)=e^x-\frac{a}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-2ax$，且 $f(0)=1$，……………………………………………8分

所以 $f(x)=e^x-\frac{a}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-2ax\geqslant 1$ 恒成立，

当 $x>0$ 时，$a\leqslant\left(\frac{e^x-\frac{x^2}{2}-1}{\frac{x^3}{3}+2x}\right)_{\min}$；

当 $x<0$ 时，$a\geqslant\left(\frac{e^x-\frac{x^2}{2}-1}{\frac{x^3}{3}+2x}\right)_{\max}$ ……………………………………………9分

令 $h(x)=\frac{e^x-\frac{x^2}{2}-1}{\frac{x^3}{3}+2x}$，则 $h'(x)=\frac{(e^x-x)(\frac{x^3}{3}+2x)-(e^x-\frac{x^2}{2}-1)(x^2+2)}{(\frac{x^3}{3}+2x)^2}$，

令 $\varphi(x)=(e^x-x)(\frac{x^3}{3}+2x)-(e^x-\frac{x^2}{2}-1)(x^2+2)$，则 $\varphi'(x)=\frac{x^3}{3}(e^x+2)$，

当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)>\varphi(0)=0$

$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$x\to 0$ 时，$h(x)\to \dfrac{e^x-x}{x^2+2}\to \dfrac{1}{2}$，所以 $a\leq \dfrac{1}{2}$．……………………10 分

当 $x<0$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$\varphi(x)>\varphi(0)=0$，

$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

$x\to 0$，$h(x)\to \dfrac{e^x-x}{x^2+2}\to \dfrac{1}{2}$，所以 $a\geq \dfrac{1}{2}$．……………………11 分

综上，$a=\dfrac{1}{2}$．……………………12 分

注：方法二：由洛必达法则得到 $h(x)$ 的极限值为 $\dfrac{1}{2}$，扣 1 分。