参照秘密级管理★启用前

2023−2024学年度第一学期高三期中检测

数学参考答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．A；2．B；3．D；4．C；5．D；6．D；7．A；8．C．

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．ABD；10．AC；11．ABD；12．BCD．

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．40；14．$\frac{4}{7}$；15．4或5；16．-1．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10分）解：解法一：①②⇒③

由②得：$a=\sqrt{3}c$ ……………2分

又因①知：$a^2-c^2=bc$，解得$b=2c$ ……………5分

所以，$A=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{2}$，$C=\frac{\pi}{6}$ …………7分

所以$b+b\cos A=2c+c=3c$，$\sqrt{3}a\sin B=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}c\cdot 1=3c$

所以 $b+b\cos A=\sqrt{3}a\sin B$ ……………………10分

解法二：①③⇒②

由③得：$\sin B+\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\sin B$ …………2分

整理得：$\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ …………4分

所以$A=\frac{\pi}{3}$ …………5分

由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$ …………7分

又由①知：$a^2-c^2=bc$，

整理得$a=\sqrt{3}c$ …………9分

即：$\sin A=\sqrt{3}\sin C$． …………10分

解法三：②③⇒①

由③得：$\sin B+\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\sin B$ …………2分

整理得：$\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ ············4 分

所以 $A=\frac{\pi}{3}$ ·························5 分

由②得：$C=\frac{\pi}{6}$，$a=\sqrt{3}c$ ············7 分

则 $B=\frac{\pi}{2}$，$b=2c$ ············9 分

所以 $a^2-c^2=2c^2=bc$ ······················10 分

18.（12 分）解：（1）$f(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln(1+x)$，定义域为 $\{x|x>-1且x\neq0\}$

所以 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\times\ln(1+x)+\left(\frac{1}{x}+1\right)\times\frac{1}{x+1}=-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x}$ ···········2 分

由此可得 $f(1)=2\ln2$，$f'(1)=1-\ln2$ ···········4 分

所以函数 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(x))$ 处的切线方程为 $y-2\ln2=(1-\ln2)(x-1)$

即 $(1-\ln2)x-y+3\ln2-1=0$ ···············5 分

（2）$f'(x)=-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

令 $H(x)=x-\ln(1+x)$，则 $H'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$， ··············7 分

因为 $H(0)=0$， ···············8 分

所以 $x\in(-1,0)$，$H'(x)<0$，$H(x)$ 单调递减，$H(x)>H(0)=0$，

$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ··············10 分

$x\in(0,+\infty)$，$H'(x)>0$，$H(x)$ 单调递增，$H(x)>H(0)=0$，

$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$. ··············12 分

19.（12 分）解：（1）第一回合甲得分，第二回合甲得分的概率为 $\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$ ······1 分

第一回合乙得分，第二回合甲得分的概率为$\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$ ············2 分

设“第三回合由甲发球”为事件 A，则 $P(A)=\frac{9}{25}+\frac{2}{25}=\frac{11}{25}$ ············4 分

(2)　X 可以取 0,1,2,3. ············5 分

$P(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{32}{125}$.

$P(X=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{36}{125}$.

$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{30}{125}=\frac{6}{25}$.

$P(X=3)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{27}{125}$. ············10 分

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{32}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{27}{125}$

$E(X)=0\times\frac{32}{125}+1\times\frac{36}{125}+2\times\frac{30}{125}+3\times\frac{27}{125}=\frac{177}{125}$. ············12 分

20.（12 分）解析：①由题意得

$$\begin{cases}1+d+q^2=8\\1+2d+q=9\\q>0\end{cases}$$ ....2 分

解得 $q=2,d=3$ ....4 分

所以，$a_n=3n-2,n\in N^*,b_n=2^{n-1},n\in N^*$ ....6 分

②由题意可知新数列$\{c_n\}$为：b_2、b_3、b_5、b_6、b_8、b_9.................7 分

则当n为偶数时

$$S_n=\left(b_2+b_5+b_8+\ldots\ldots+b_{3\left(\frac{n}{2}\right)-1}\right)+\left(b_3+b_6+b_9+\ldots\ldots+b_{3\left(\frac{n}{2}\right)}\right)$$

$$=\frac{2\left(1-8^{\frac{n}{2}}\right)}{1-8}+\frac{4\left(1-8^{\frac{n}{2}}\right)}{1-8}=\frac{3\cdot2^{\frac{3n+2}{2}}-6}{7},\ n\in N^*$$ 9分

当n为奇数时

$$S_n=S_{n-1}+c_n=S_{n-1}+b_{\frac{3n+1}{2}}=\frac{3\cdot 2^{\frac{3n-1}{2}}-6}{7}+2^{\frac{3n-1}{2}}=\frac{5\cdot 2^{\frac{3n+1}{2}}-6}{7},n\in N^*$$ ……11分

综上：$S_n=\begin{cases}\dfrac{3\cdot 2^{\frac{3n+2}{2}}-6}{7}, n\text{为偶数}\\ \dfrac{5\cdot 2^{\frac{3n+1}{2}}-6}{7}, n\text{为奇数}\end{cases}$ ……………………12分

21.（12分）解：(1)

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{21500}{\sqrt{3125000\times 200}}=\frac{43}{50}=0.86$$ ……………2分

$$r_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(v_i-\bar{v})^2}}=\frac{14}{\sqrt{770\times 0.308}}=\frac{10}{11}\approx 0.91,$$ ……………4分

则$|r_1|<|r_2|$，故从相关系数的角度，模型$y=e^{\lambda x+t}$的拟合更好. ………5分

(2) 先建立v关于x的线性回归方程.

由$y=e^{\lambda x+t}$，得$\ln y=t+\lambda x$，即$v=t+\lambda x$.

$$\hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})}{\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{14}{770}\approx 0.018,$$ ……………………7分

$\hat{t}=\bar{v}-\hat{\lambda}\bar{x}=4.20-0.018\times 20=3.84$

v关于x的线性回归方程：$\hat{v}=0.02x+3.84$ ……………………8分

所以$\ln\hat{y}=0.02x+3.84$，$\hat{y}=e^{0.02x+3.84}$ ……………………9分

(3) 零假设为

H_0：对新款式瓷器喜爱程度与年龄之间无关联.

根据列联表中的数据，经计算可得

$$\chi^2=\frac{600\times(200\times150-100\times150)^2}{300\times300\times350\times250}=\frac{120}{7}\approx17.143>10.828=\chi_{0.001}$$ ············11 分

根据小概率 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断不成立，即认为该地区对新款式瓷器喜爱程度与年龄有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.001. ··················12 分

22.（12 分）解证：（1）函数 $f(x)=x^2(\ln x-a)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2x(\ln x-a)+x=x(2\ln x-2a+1)$， ······························1 分

令 $f'(x)=0$，所以 $\ln x=\dfrac{2a-1}{2}$，得 $x=e^{\frac{2a-1}{2}}$， ···························2 分

当 $x\in\left(0,e^{\frac{2a-1}{2}}\right)$，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(e^{\frac{2a-1}{2}},+\infty\right)$，$f'(x)>0$，

故函数 $f(x)$ 递减区间为 $\left(0,e^{\frac{2a-1}{2}}\right)$，递增区间为 $\left(e^{\frac{2a-1}{2}},+\infty\right)$. ··················3 分

（2）因为函数 $f(x)$ 在 $x=e$ 处取得极值，所以 $x=e^{\frac{2a-1}{2}}=e$，得 $a=\dfrac{3}{2}$， ············4 分

所以 $f(x)=x^2(\ln x-\dfrac{3}{2})$，得 $f'(x)=x(2\ln x-2)=2x(\ln x-1)$，

令 $g(x)=2x(\ln x-1)$，

因为 $g'(x)=2\ln x$，当 $x=1$ 时，$g'(x)=0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，且当 $x\in(0,e)$ 时，$g(x)=2x(\ln x-1)<0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g(x)=2x(\ln x-1)>0$，

故 $0<x_1<1<x_2<e$. ··5 分

先证 $x_1+x_2>2$，需证 $x_2>2-x_1$.

因为 $x_2>1,2-x_1>1$，下面证明 $g(x_1)=g(x_2)>g(2-x_1)$.

设 $t(x)=g(2-x)-g(x),x\in(0,1)$， ··6 分

则 $t'(x)=-g'(2-x)-g'(x)$，$t'(x)=-2\ln(2-x)-2\ln x=-2\ln[(2-x)x]>0$， ·········7 分

故 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，故 $t(x)<t(1)=g(1)-g(1)=0$，

所以 $t(x_1)=g(2-x_1)-g(x_1)<0$，则 $g(2-x_1)<g(x_1)=g(x_2)$， ……………8 分

由 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $2-x_1<x_2$，即得 $x_1+x_2>2$. ……………9 分

下面证明：$x_1+x_2<\mathrm{e}$.

由 $x_1\in(0,1)$，易得 $g(x_1)=2x_1(\ln x_1-1)<-2x_1$； ……………………………10 分

当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，记 $h(x)=g(x)-(2x-2\mathrm{e})=2x\ln x-4x+2\mathrm{e}$， ……………11 分

$h'(x)=2\ln x-2<0$，所以 $h(x)$ 为减函数得 $h(x)>h(\mathrm{e})=2\mathrm{e}-4\mathrm{e}+2\mathrm{e}=0$，

所以 $g(x_2)>2x_2-2\mathrm{e}$，

由 $g(x_1)=g(x_2)$，所以 $2x_2-2\mathrm{e}<-2x_1$，即 $x_1+x_2<\mathrm{e}$. ……………………12 分