长沙市一中2024届高三月考试卷(四)

数学参考答案

一、选择题(本大题共8个小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	D	A	A	B

1. D 【解析】$N=\{0,2,4\}$,故 $M\cap N=\{0,2\}$,故选 D.

2. C 【解析】与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量为$\left(\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+2^2}},\frac{2}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}\right)=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,故选 C.

3. B 【解析】运动员甲第二天去 A 餐厅用餐的概率为 $P=\frac{1}{2}\times0.7+\frac{1}{2}\times0.5=0.6$,故选 B.

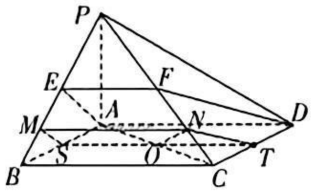
4. C 【解析】因为 $A>0$,由图象可知 $A=2$,设 $f(x)$的最小正周期为 T.由图象可知$\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$,解得 $T=\pi$,因为 $\omega>0$,所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,解得 $\omega=2$,故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$,将$\left(\frac{\pi}{12},2\right)$代入解析式,可得 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=2$,故$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. A 选项,当 $x=-\frac{\pi}{6}$时,$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\times2+\frac{\pi}{3}\right)=0$,故函数 $y=f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$对称,A 正确;B 选项,当 $x=-\frac{5\pi}{12}$时,$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\times2+\frac{\pi}{3}\right)=-2$,故函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=-\frac{5\pi}{12}$对称,B 正确;C 选项,$x\in\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{3}\in[-\pi,0]$,因为 $y=2\sin z$ 在 $z\in[-\pi,0]$不单调,故函数 $y=f(x)$在$\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$不单调递减,C 错误;D 选项,$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位可得 $y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin 2x$,D 正确. 故选 C.

5. D 【解析】因为直线 $l:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角为$30°$,且圆 C 经过点 $P(2,\sqrt{3})$,所以圆 C 的圆心在两切线所成角的角平分线 $y=\sqrt{3}x$ 上.设圆心 $C(a,\sqrt{3}a)$,则圆 C 的方程为$(x-a)^2+(y-\sqrt{3}a)^2=a^2$,将点 $P(2,\sqrt{3})$的坐标代入,得$(2-a)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}a)^2=a^2$,整理得 $3a^2-10a+7=0$,解得 $a=1$ 或 $a=\frac{7}{3}$;所以圆 C 的半径为 1 或$\frac{7}{3}$.故选 D.

6. A 【解析】由 $f(x)$为偶函数可得 $f(-x)=f(x)$,即$\frac{1}{a^x}+\frac{1}{b^x}=a^x+b^x$,所以$(a^x+b^x)\left[\frac{1}{(ab)^x}-1\right]=0$. 因为 $x\in\mathbf{R}$,且 $a>0,b>0,a\neq1,b\neq1$,所以 $a^x+b^x>0$,所以 $ab=1$,则$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{4}{b}}=4$,当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{4}{b}$,即 $a=\frac{1}{2},b=2$ 时,$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$取最小值 4. 故选 A.

7. A 【解析】设 $f(x)$的图象上点 M 的坐标为(x,y),其关于直线 $y=x$ 的对称点 N 的坐标为(y,x),点 N 在 $g(x)$图象上,所以有$\begin{cases}y=kx,\\x=e^{-y},\end{cases}$且 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$. 消去 y 可得 $-kx=\ln x$,所以 $-k=\frac{\ln x}{x}$,令 $h(x)=\frac{\ln x}{x},x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$,可以求出 $h(x)$的值域为$\left[-e,\frac{1}{e}\right]$,所以实数 k 的取值范围为$\left[-\frac{1}{e},e\right]$,故选 A.

8. B 【解析】先找到一个平面总是保持与 BP 垂直，取 BP，CP 的中点 E，F，连接 AE，EF，DF，因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB\perp AD$. 因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，又 $PA\cap AB=A$，所以 $AD\perp$ 平面 PAB，所以 $AD\perp PB$. 因为在 $\triangle PAB$ 中，$AP=AB$，E 为 BP 的中点，所以 $AE\perp PB$. 又 $AE\cap AD=A$，所以 $BP\perp$ 平面 $AEFD$. 进一步，取 BE，CF，AB 的中点 M，N，S，连接 MS，MN，NT，ST，易证平面 $MNTS$∥平面 $AEFD$，故 $BP\perp$ 平面 $MNTS$，记 $ST\cap AC=O$，又 Q 是 $\triangle PAC$ 内的动点，根据平面的基本性质得：点 Q 的轨迹为平面 $MNTS$ 与平面 PAC 的交线段 NO，在 $\triangle NOC$ 中，$NC=\sqrt{3}$，$CO=2\sqrt{2}$，$\cos\angle NCO=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，由余弦定理得，$NO^2=8+3-2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=3$. 故 $NO=\sqrt{3}$. 故选 B.



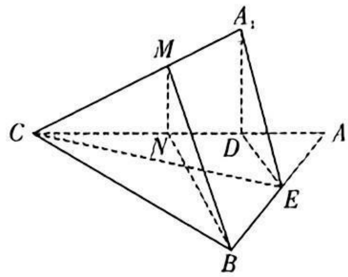
二、选择题(本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分)

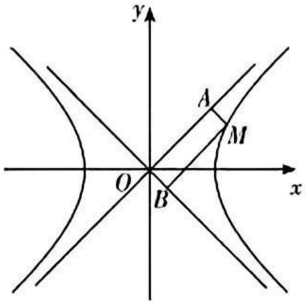
题　号	9	10	11	12
答　案	ABD	ABD	ABD	AB

9. ABD 【解析】对于 A 选项，由“杨辉三角”的规律可得 A 正确；对于 B 选项，由二项式系数的性质知 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$，B 正确；第 20 行的数是 $C_{20}^i(i=0,1,2,\cdots,20)$，最大的 C_{20}^{10} 是第 11 个数，C 错误；第 15 行中，第 7 个数与第 8 个数分别是 C_{15}^6 和 C_{15}^7，$\dfrac{C_{15}^6}{C_{15}^7}=\dfrac{\dfrac{A_{15}^6}{6!}}{\dfrac{A_{15}^7}{7!}}=\dfrac{7}{9}$，D 正确，故选 ABD.

10. ABD 【解析】A 项，$a_1>1$ 且 $a_6a_7>1>0\Rightarrow q>0$，而 $\dfrac{a_6-1}{a_7-1}<0\Rightarrow a_6-1$ 和 a_7-1 异号. 由于 $a_1>1$ 知 $a_6-1>0$，$a_7-1<0$，即 $a_6>1$，$a_7<1$，$0<q=\dfrac{a_7}{a_6}<1$，故 A 项正确；B 项，从前面的求解过程知 $a_1>1$，$0<q<1$，说明 $\{a_n\}$ 是单调递减的正项等比数列，且 $0<a_7<1$，所以 $0<a_8<1$，那么 $0<a_7a_8<1$，故 B 项正确；C 项，$\{a_n\}$ 是正项数列，S_n 没有最大值，故 C 项错误；D 项，从前面的分析过程可知 $\{a_n\}$ 前 6 项均大于 1，从 a_7 起全部在 $(0,1)$ 上，所以 T_n 的最大值为 T_6，故 D 项正确，故选 ABD.

11. ABD 【解析】对于选项 A，因为 $ED\perp AC$，所以 $DE\perp CD$，$DE\perp A_1D$，因为 $CD\cap A_1D=D$，所以 $DE\perp$ 平面 A_1CD，因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1CD，所以 $DE\perp A_1C$，所以选项 A 正确；对于选项 B，当平面 $A_1DE\perp$ 平面 $BCDE$ 时，四棱锥 A_1-BCDE 的体积最大，由选项 A，易知 $\angle A_1DC$ 为二面角 A_1-DE-C 的平面角，$\angle A_1DC=90°$，即 $A_1D\perp DC$，$A_1D\perp DE$，$DE\cap DC=D$，此时 $A_1D\perp$ 平面 $BCDE$，即 A_1D 为四棱锥底面 $BCDE$ 上的高，四棱锥 A_1-BCDE 的体积的最大值为：$\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4^2-\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right)\times1=\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$，故 B 选项正确；对于选项 C，假设存在某个位置，使得 $A_1E\perp BE$，连接 CE，则由正三角形性质得 $CE\perp BE$，因为 $A_1E\cap CE=E$，所以 $BE\perp$ 平面 A_1CE，所以 $BE\perp A_1C$，由 A 选项可得 $DE\perp A_1C$，因为 $DE\cap BE=E$，所以 $A_1C\perp$ 平面 $BCDE$，所以 $A_1C\perp CD$，所以 $A_1D>CD$，显然不可能，所以假设错误，所以选项 C 错误；对于选项 D，由题设得，点 M 在线段 A_1C 上，且 $CM=2MA_1$，取 AC 的中点 N，连接 NB，可得 $NB\perp AC$，NB∥DE，由底面三角形 ABC 的边长为 4，则 $BN=2\sqrt{3}$，$A_1D=AD=1$，$MN=\dfrac{2}{3}A_1D=\dfrac{2}{3}$，因为 $DE\perp$ 平面 A_1CD，所以 $BN\perp$ 平面 A_1CD，所以 $BN\perp MN$，所以 $\triangle BMN$ 为直角三角形，因为 $BN=2\sqrt{3}$，$MN=\dfrac{2}{3}$，所以 $BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$ 为定值，所以选项 D 正确，故选 ABD.





12. AB 【解析】对于 A，由双曲线 $C:x^2-y^2=2$，得 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，$\therefore c=\sqrt{2+2}=2$，故 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，A 正确；对于 B，双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的渐近线为 $y=\pm x$，则四边形 $OAMB$ 为矩形，又双曲线右顶点为 $(\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0)$ 到直线 $y=\pm x$ 的距离均为 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$，故矩形 $OAMB$ 为正方形，即存在点 M，M 为双曲线右顶点时，使得四边形 $OAMB$ 为正方形，B 正确；对于 C，设 $M(x_0,y_0)$，不妨设 A 在第一象限，B 在第四象限，由于 $MA\perp OA$，故可得 MA 的方程为 $y-y_0=-(x-x_0)$，联立 $y=x$，可得 $x=\frac{x_0+y_0}{2}$，则 $A\left(\frac{x_0+y_0}{2},\frac{x_0+y_0}{2}\right)$，同理 $MB\perp OB$，可得 MB 的方程为 $y-y_0=x-x_0$，联立 $y=-x$，可得 $x=\frac{x_0-y_0}{2}$，则 $B\left(\frac{x_0-y_0}{2},-\frac{x_0-y_0}{2}\right)$，故 $k_{AB}=\frac{-\frac{x_0-y_0}{2}-\frac{x_0+y_0}{2}}{\frac{x_0-y_0}{2}-\frac{x_0+y_0}{2}}=\frac{x_0}{y_0}$，而 $k_{OM}=\frac{y_0}{x_0}$，故 $k_{AB}\cdot k_{OM}=1$，C 错误；对于 D，由以上分析可知 $|MA|=\sqrt{\left(\frac{x_0+y_0}{2}-x_0\right)^2+\left(\frac{x_0+y_0}{2}-y_0\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}|x_0-y_0|$，同理 $|MB|=\sqrt{\left(\frac{x_0-y_0}{2}-x_0\right)^2+\left(-\frac{x_0-y_0}{2}-y_0\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}|x_0+y_0|$，故 $|MA|+|MB|=\frac{\sqrt{2}}{2}(|x_0-y_0|+|x_0+y_0|)$，根据双曲线的对称性，不妨假设 M 在第一象限，则 $x_0>y_0$，故 $|MA|+|MB|=\sqrt{2}x_0$，令 $\sqrt{2}x_0=\sqrt{3}$，$\therefore x_0=\frac{\sqrt{6}}{2}$，将 $x_0=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 代入 $x^2-y^2=2$，即有 $y^2=-\frac{1}{2}$，显然不可能，即双曲线上不存在点 M，使得 $|MA|+|MB|=\sqrt{3}$，D 错误，故选 AB.

三、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $-\frac{3}{4}$ 【解析】$\sin(\theta-\pi)=-\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=-\frac{3}{5}<0$，由于角 θ 的终边过点 $A(4,a)$，所以 θ 在第四象限，所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{4}{5}$，所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}$.

14. 20π 【解析】设外接球的半径为 R，下底面距圆心的距离为 d，易得 $R^2=d^2+4=(d+1)^2+1$，解得 $R^2=5$，$d=1$，故外接球的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$.

15. 14 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，易知 $p=4$，$F(2,0)$，则 $\overrightarrow{FA}=(x_1-2,y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(x_2-2,y_2)$，$\overrightarrow{FC}=(x_3-2,y_3)$，因为 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{OF}$，所以 $x_1-2+x_2-2+x_3-2=2$，即 $x_1+x_2+x_3=8$. 由抛物线的定义可得 $|\overrightarrow{FA}|=x_1+2$，$|\overrightarrow{FB}|=x_2+2$，$|\overrightarrow{FC}|=x_3+2$，所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=x_1+x_2+x_3+6=14$.

16. $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$ 【解析】π 是函数 $f(x)$ 的一个周期，所以只需要考虑函数 $f(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 的取值范围即可. $f'(x)=-2\sin x\cos x\sin 2x+2\cos^2x\cos 2x=2\cos x\cos 3x$，易知 $f'(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 内有三个零点，依次为 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{6}$. 函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$ 上单调递增，计算有 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$，$f(\pi)=0$，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8}\right]$.

四、解答题（本大题共 6 个小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=4$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=2\sqrt{3}$，可得 $AB=2$. ………………………… 2 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=12$，

$\therefore AC=2\sqrt{3}$. ………………………… 4 分

(2)设$\angle ACD=\alpha$,则$\angle ACB=\angle ACD+\frac{\pi}{6}=\alpha+\frac{\pi}{6}$.

在$Rt\triangle ACD$中,$AD=3\sqrt{3}$,易知:$AC=\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin\alpha}$. ………………………………………………………… 6分

在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=\pi-\angle ACB-\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\alpha$,

由正弦定理得$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$,即$\frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$, ……………………………………………… 8分

$\therefore 2\sin\alpha=3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=3\cos\alpha$,可得$\tan\alpha=\frac{3}{2}$,即$\tan\angle ACD=\frac{3}{2}$. ………………………………………… 10分

18.【解析】(1)男性有$100\times\frac{9}{9+11}=45$人,女性有$100-45=55$人,然后可得下表:

评价性别	喜欢	不喜欢	合计
男性	15	30	45
女性	35	20	55
合计	50	50	100

…… 2分

零假设H_0:假设性别因素与评价结果无关,

计算卡方值$\chi^2=\frac{100(30\times35-20\times15)^2}{50\times50\times45\times55}=\frac{100}{11}\approx9.091$.

小概率值对应的临界值为$x_\alpha=7.879$,所以$\chi^2>x_\alpha$.

故推断零假设H_0不成立,评价结果与性别因素有关系. ………………………………………………………… 5分

(2)由题意得,选取的3人中,评价结果为"喜欢"的有1人,为"不喜欢"的有2人.

所以X的所有可能取值为150,200,250,300. ………………………………………………………………… 6分

则$P(X=150)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$,

$P(X=200)=\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+2\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{33}{64}$,

$P(X=250)=2\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{19}{64}$,

$P(X=300)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$. …………………………………………………………………………… 10分

其分布列为:

X	150	200	250	300
P	$\frac{9}{64}$	$\frac{33}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{3}{64}$

故数学期望为$E(X)=212.5$. ……………………………………………………………………………………… 12分

19.【解析】(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

由$S_n\geqslant S_3$,可知$a_3\leqslant0$,$a_4\geqslant0$,即$\begin{cases}a_1+2d\leqslant0,\\a_1+3d\geqslant0.\end{cases}$ ……………………………………………… 2分

因为a_2为整数,所以$d=a_2-a_1=a_2+5\in\mathbf{Z}$. …………………………………………………………… 3分

结合不等式组$\begin{cases}-5+2d\leqslant0,\\-5+3d\geqslant0.\end{cases}$解得$d=2$, ……………………………………………………… 5分

所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n-7$. ………………………………………………………………………………… 6分

(2)由(1)可知$b_n=(-1)^n(2n-7)(2n-5)$.

当 n 为偶数时，

$T_n=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{n-1}+b_n$

$=4\times\left[2\times(2+4+6+\cdots+n)-7\times\frac{1}{2}n\right]=2n^2-10n$. …………………………………………………… 8 分

又 $T_n\geqslant tn^2$，即 $t\leqslant 2-\frac{10}{n}$ 对任意偶数都成立，所以 $t\leqslant -3$. ………………………………………………… 9 分

同理，当 n 为奇数时，

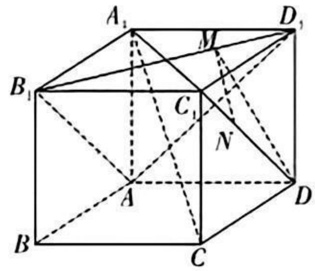
$T_n=2(n-1)^2-10(n-1)-(2n-7)(2n-5)=-2n^2+10n-23$. ………………………………………… 10 分

又 $T_n\geqslant tn^2$，即 $t\leqslant -2+\frac{10}{n}-\frac{23}{n^2}$ 对任意奇数都成立，易知当奇数 $n=1$ 时，函数 $y=-2+\frac{10}{n}-\frac{23}{n^2}$ 取最小值 -15，

故 $t\leqslant -15$.

综上，$t\leqslant -15$. ……………………………………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)如图，连接 B_1A,AD_1.



因为 $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$B_1D_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $CC_1\perp B_1D_1$.

因为四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形，所以 $A_1C_1\perp B_1D_1$.

又因为 $CC_1\cap A_1C_1=C_1$，所以 $B_1D_1\perp$ 平面 A_1C_1C.

又因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1C_1C，所以 $B_1D_1\perp A_1C$.

同理可得 $A_1C\perp AB_1$. 公众号：数学北极星

又因为 $AB_1\cap B_1D_1=B_1$，所以 $A_1C\perp$ 平面 AB_1D_1. ……………………………………………………… 3 分

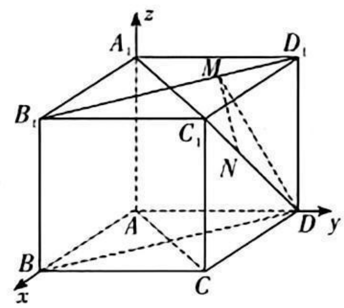
因为 $B_1C_1=AD$，$B_1C_1/\!/AD$，所以四边形 ADC_1B_1 为平行四边形，所以 $C_1D/\!/AB_1$.

因为 $MN\perp C_1D$，所以 $MN\perp AB_1$.

又因为 $MN\perp B_1D_1$，$AB_1\cap B_1D_1=B_1$，所以 $MN\perp$ 平面 AB_1D_1.

所以 $A_1C/\!/MN$. …………………………………………………………………………………………………… 6 分

(2)如图，以 A 为坐标原点，AB,AD,AA_1 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,2)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$C_1(2,2,2)$.



连接 BD,AC，易知 $AC\perp BD$，$AC\perp BB_1$，$BD\cap BB_1=B$，故 $AC\perp$ 平面 B_1DM，

所以平面 B_1DM 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$. ……………………………… 8 分

又 $\overrightarrow{A_1C}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{DC_1}=(2,0,2)$.

设平面 DMN 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，由(1)知 $A_1C/\!/MN$，

故 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC_1}=2x+2z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=2x+2y-2z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $y=-2,z=-1$.

$\therefore$ 平面 DMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-2,-1)$. …………………………………………………… 10 分

设平面 B_1DM 与平面 DMN 的夹角为 θ，则

$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AC}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

所以平面 B_1DM 与平面 DMN 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$. …………………………………………………… 12 分

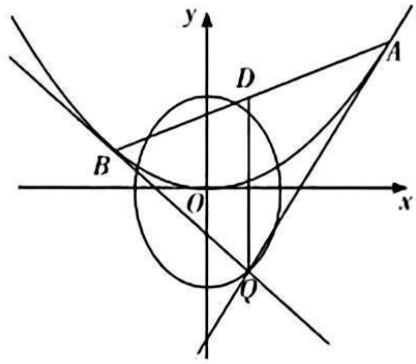
21.【解析】(1)因为点 $M\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2}{3}\right)$ 在椭圆 $C_1:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{3}=1$ 上，所以 $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}{3}=1$，

解得 $a^2=4$，所以椭圆 $C_1:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$，

则椭圆的上焦点为 $(0,1)$，所以 $\frac{p}{2}=1$，解得 $p=2$，则抛物线 $C_2:x^2=4y$. ……………………………… 4 分

(2)依题意 AB 的斜率存在，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$AB:y=kx+m(m>0)$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2=4y,\end{cases}$消去 y 整理得 $x^2-4kx-4m=0$，所以$\begin{cases}x_1+x_2=4k,\\x_1x_2=-4m,\\\Delta=16k^2+16m>0.\end{cases}$ ······························ 6 分



因为 $y=\dfrac{x^2}{4}$，则 $y'=\dfrac{x}{2}$，所以 $QA:y-\dfrac{x_1^2}{4}=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $QA:y=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{x_1^2}{4}$，同理可得 $QB:y=\dfrac{x_2}{2}x-\dfrac{x_2^2}{4}$.

由直线 QA 的方程与直线 QB 的方程联立有$\begin{cases}y=\dfrac{x_2}{2}x-\dfrac{x_2^2}{4},\\y=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{x_1^2}{4},\end{cases}$可得 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$,

将 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$代入直线 $y=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{x_1^2}{4}$可得 $y=\dfrac{x_1x_2}{4}$,

所以 $Q\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{4}\right)$，即 $Q(2k,-m)$. ·· 8 分

因为点 Q 在椭圆$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$ 上，所以$\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{4k^2}{3}=1$，即 $3m^2+16k^2=12$,

设 AB 的中点为 D，则 $y_D=k\times\dfrac{x_1+x_2}{2}+m=2k^2+m$，即 $D(2k,2k^2+m)$.

所以 $S_{\triangle QAB}=\dfrac{1}{2}|x_1-x_2||QD|=\dfrac{1}{2}|x_1-x_2|(2k^2+2m)=|x_1-x_2|(k^2+m)$

$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}(k^2+m)=4\sqrt{k^2+m}(k^2+m)=4(k^2+m)^{\frac{3}{2}}$. ································ 10 分

因为 $3m^2+16k^2=12$，所以 $k^2=\dfrac{12-3m^2}{16}\geqslant0$，解得 $-2\leqslant m\leqslant2$，又 $m>0$，所以 $0<m\leqslant2$,

则 $k^2+m=\dfrac{12-3m^2}{16}+m=-\dfrac{3}{16}\left(m-\dfrac{8}{3}\right)^2+\dfrac{25}{12}$，所以当 $m=2$ 时，$(k^2+m)_{\max}=2$，此时 $4(k^2+m)^{\frac{3}{2}}=8\sqrt{2}$,

又 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$(S_{\triangle QAB})_{\max}=8\sqrt{2}$. ································ 12 分

22.**【解析】**(1)当 $k=2$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant0$.

所以函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ·· 3 分

(2)(i)$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2k}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-2kx}{x(x+1)^2}$.

当 $k\leqslant2$ 时，$f'(x)\geqslant0$，所以 $f(x)>f(1)=0$，满足题意；

当 $k>2$ 时，令 $h(x)=(x+1)^2-2kx=x^2+(2-2k)x+1$，则 $h(1)=4-2k<0$，$h(x)$在$(1,k-1)$上单调递减，所以当 $x\in(1,k-1)$时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以 $f(k-1)<f(1)=0$，不符合题意.

综上，实数 k 的取值范围是$(-\infty,2]$. ·· 7 分

(ii)由(i)可知 $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$对 $x>1$ 时恒成立.

令$\dfrac{1}{m}=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，则 $x=\dfrac{2m+1}{2m-1}>1$，则有 $\ln\dfrac{2m+1}{2m-1}>\dfrac{1}{m}$.

取 $m=n+1,n+2,n+3,\cdots,2n$，有

$\ln\dfrac{2n+3}{2n+1}+\ln\dfrac{2n+5}{2n+3}+\ln\dfrac{2n+7}{2n+5}+\cdots+\ln\dfrac{4n+1}{4n-1}>\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$,

即$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}<\ln\dfrac{4n+1}{2n+1}<\ln 2$. ································ 12 分