保密★启用前

2023—2024 学年度第一学期期中考试

高三数学试题（B）

2023.11

注意事项：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分．满分 150 分，考试时间 120 分钟．
2. 答题前，考生务必将姓名、班级等个人信息填写在答题卡指定位置．
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上．选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答．超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效．

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $M=\{x\mid e^{x-1}>1\}, N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，则 $M\cup N=$

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(1,3)$　　D. $(-1,+\infty)$

2. 王昌龄是盛唐著名的边塞诗人，被誉为“七绝圣手”，其《出塞》传诵至今，“秦时明月汉时关，万里长征人未还．但使龙城飞将在，不教胡马度阴山”，由此推断，其中最后一句“不教胡马度阴山”是“但使龙城飞将在”的

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 设 $M=5a^2-a+1$，$N=4a^2+a-1$，则 M，N 的大小关系为

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. 大小关系不确定

4. 近来猪肉价格起伏较大，假设第一周、第二周的猪肉价格分别为 a 元/斤、b 元/斤，甲和乙购买猪肉的方式不同，甲每周购买 20 元钱的猪肉，乙每周购买 6 斤猪肉，甲、乙两次平均单价为分别记为 m_1，m_2，则下列结论正确的是

A. $m_1=m_2$　　B. $m_1>m_2$

C. $m_2>m_1$　　D. m_1,m_2 的大小无法确定

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，当 $1\le x<2$ 时，$f(x)=\log_2(x+2)$，则 $f(2024)=$

A. 0　　B. 2　　C. -3　　D. 3

6. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\alpha$ 为钝角，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，则 $\tan\beta=$

A. $\dfrac{5}{7}$　　B. $-\dfrac{5}{7}$　　C. 7　　D. -7

7. 函数 $y=[x]$ 在数学上称为高斯函数，也叫取整函数，其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，如 $[1.5]=1,[-2.3]=-3,[3]=3$，那么不等式 $4[x]^2-16[x]+7\le 0$ 成立的一个充分不必要条件是

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$　　B. $[1,3]$　　C. $[1,4)$　　D. $[1,4]$

8. 已知 ΔOAB 是边长为 1 的正三角形，若点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=(2-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}(t\in\mathrm{R})$，则 $2|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为

A. $\sqrt{3}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

二、多项选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 设 $x>0,y>0$，满足 $x+y=1$，则下列结论正确的是

A. $\sqrt{xy}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$　　B. 4^x+4^y 的最小值为 4

C. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的最大值为 2　　D. $\frac{4x}{1-x}+\frac{y}{1-y}$ 的最小值为 4

10. 已知不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\{x\mid x<-1或x>3\}$，则下列结论正确的是

A. $a<0$

B. $a+b+c>0$

C. $c<0$

D. $cx^2-bx+a<0$ 的解集为 $\{x\mid x<-\frac{1}{3}或x>1\}$

11. 已知 $f(x)=2\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x$（$\omega>0$）的最小正周期为 π，则下列说法正确的是

A. $\left(\frac{5\pi}{12},1\right)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个对称中心

B. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$ 有两个极值点

C. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 的值域为 $[0,3]$

D. 将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)$ 为偶函数

12. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且 $f(1-x)-f(1+x)+2x=0$ 恒成立，若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，则

A. $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减　　B. $f(0)=0$

C. $f(2022)=2022$　　D. $f'(2023)=2$

三、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡的相应位置．

13．若命题“存在$x\in\mathbf{R}$，使$2x^2+5x-m=0$”是真命题，则实数 m 的一个可能取值为____．

14．设$a\in\mathrm{R}$，若函数$y=e^x+ax$有大于零的极值点，则 a 的取值范围是______．

15．公路北侧有一幢楼，高为 60 米，公路与楼脚底面在同一平面上．某人在点 A 处测得楼顶的仰角为$45°$，他在公路上自西向东行走，行走 60 米到点 B 处，测得仰角为 $45°$，沿该方向再行走 60 米到点 C 处，测得仰角为θ．则$\sin\theta=$______．

16．已知ΔABC为等边三角形，点 G 是ΔABC的重心．过点 G 的直线 l 与线段 AB 交于点 D，与线段 AC 交于点 E．设$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AC}$，则$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=$______；$\Delta ADE$与$\Delta ABC$周长之比的取值范围为______．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）已知p：实数x满足$x^2-10x+16\le 0$，q：实数x满足$x^2-4mx+3m^2\le 0$（其中$m>0$）．

（1）若$m=1$，且 p 和 q 至少有一个为真，求实数 x 的取值范围；

（2）若 q 是 p 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围．

18．（12 分）已知函数$f(x)=x^2-2ax+a$．

（1）若$f(x)\ge 0$的解集为$\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围；

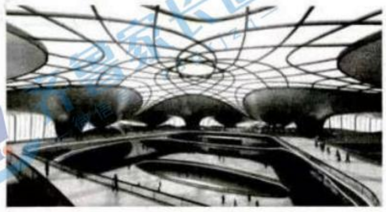
（2）当$a\ne -3$时，解关于 x 的不等式$f(x)>4a-(a+3)x$．

19．（12 分）在ΔABC中，角 A,B,C 所对的边分别 a,b,c，且$b\cos A+a\cos B=2c\cos A$

（1）求角 A 的值；

（2）已知 D 在边 BC 上，且$BD=3DC$，$AD=3$，求ΔABC的面积的最大值．

20．（12 分）用数学的眼光看世界就能发现很多数学之“美”．现代建筑讲究线条感，曲线之美让人称奇．衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率，曲线的曲率定义如下：若 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的曲率 $K=\dfrac{\left|f''(x)\right|}{\left(1+\left[f'(x)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}$．



（1）若曲线 $f(x)=\ln x+x$ 与 $g(x)=\sqrt{x}$ 在$(1,1)$处的曲率分别为 K_1,K_2，比较 K_1,K_2 大小；

（2）求正弦曲线 $h(x)=\sin x(x\in R)$ 曲率的最大值．

21．（12 分）对 1 个单位质量的含污物体进行清洗，清洗前其清洁度（含污物体的清洁度定义为：$1-\dfrac{\text{污物质量}}{\text{物体质量(含污物)}}$）为 0.8，要求洗完后的清洁度是 0.99．有两种方案可供选择，方案甲：一次清洗；方案乙：两次清洗．该物体初次清洗后受残留水等因素影响，其质量的变化量为$a(1\le a\le 3)$．设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是$\dfrac{x+0.8}{x+1}(x>a-1)$，用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是$\dfrac{y+ac}{y+a}$，其中 $c(0.8<c<0.99)$ 是该物体初次清洗后的清洁度．

（1）分别求出方案甲以及 $c=0.95$ 时方案乙的用水量，并比较哪一种方案用水量较少；

（2）若采用方案乙，当 a 为某定值时，如何安排初次与第二次清洗的用水量，使总用水量最少？并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响．

22．（12 分）已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{\cos x},-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$．

（1）求证：$f(x)+f(-x)>4$；

（2）求函数 $f(x)$ 的极值．

高三数学试题（B）参考答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．D　2．A　3．A　4．C　5．A　6．D　7．B　8．A

二、多项选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．BD　10．AB　11．ACD　12．BC

三、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡的相应位置．

13．$-\dfrac{25}{8}$（答案不唯一）　14．$(-\infty,-1)$

15．$\dfrac{1}{2}$　16．3（2 分）　$\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right]$（3 分）

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

解：（1）p：实数 x 满足 $x^2-10x+16\le 0$，解得 $2\le x\le 8$，　……………2 分

当 $m=1$ 时，q：$x^2-4x+3\le 0$，解得 $1\le x\le 3$，　……………3 分

因为 p 和 q 至少有一个为真，所以 $2\le x\le 8$ 或 $1\le x\le 3$，所以 $1\le x\le 8$，

所以实数 x 的取值范围为 $[1,8]$；　……………5 分

（2）因为 $m>0$，由 $x^2-4mx+3m^2\le 0$，解得 $m\le x\le 3m$，即 q：$m\le x\le 3m$，　………7 分

因为 q 是 p 的充分不必要条件，

所以 $\begin{cases} m\ge 2 \\ 3m\le 8 \end{cases}$（等号不同时取），所以 $2\le m\le\dfrac{8}{3}$．　……………10 分

18．（12 分）

解：（1）由题意知 $x^2-2ax+a\ge 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $\Delta=4a^2-4a\le 0$，解得 $0\le a\le 1$，

即实数 a 的取值范围为 $[0,1]$；　……………4 分

（2）由 $f(x)>4a-(a+3)x$ 得：$x^2+(3-a)x-3a=(x+3)(x-a)>0$；　……………6 分

当 $a>-3$ 时，$(x+3)(x-a)>0$ 的解为 $x<-3$ 或 $x>a$；　……………8 分

当 $a<-3$ 时，$(x+3)(x-a)>0$ 的解为 $x<a$ 或 $x>-3$；　……………10 分

综上所述：当 $a>-3$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,-3)\cup(a,+\infty)$；当 $a<-3$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,a)\cup(-3,+\infty)$．　……………12 分

19.（12 分）

解：（1）在ΔABC中因为$b\cos A+a\cos B=2c\cos A$.

由正弦定理得$\sin B\cos A+\sin A\cos B=2\sin C\cos A$，

所以$\sin(A+B)=2\sin C\cos A$， ………………2 分

因为$A+B+C=\pi$，所以$\sin(A+B)=\sin C$．故$\sin C=2\sin C\cos A$．…………3 分

又C是ΔABC的内角，所以$\sin C\neq 0$．从而$\cos A=\dfrac{1}{2}$.

而A为ΔABC的内角，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$； ………………6 分

（2）因为$\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$所以$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$，所以$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$， …………7 分

从而$9=\dfrac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{9}{16}\overrightarrow{AC}^2+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow 9=\dfrac{1}{16}c^2+\dfrac{9}{16}b^2+\dfrac{3}{16}bc$， ………………9 分

由基本不等式可得：$9\geq\dfrac{3}{8}bc+\dfrac{3}{16}bc=\dfrac{9}{16}bc$，当且仅当$b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $c=4\sqrt{3}$时等号成立，

故ΔABC的面积的最大值为$\dfrac{1}{2}\times 16\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$． ………………12 分

20.（12 分）

解：（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，所以$K_1=\dfrac{|f''(1)|}{(1+[f'(1)]^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{5^{\frac{3}{2}}}$， …………3 分

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$g''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$，$K_2=\dfrac{|g''(1)|}{(1+[g'(1)]^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2}{5^{\frac{3}{2}}}$，所以$K_1<K_2$；

…………6 分

（2）$h'(x)=\cos x$，$h''(x)=-\sin x$，

所以$K=\dfrac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$，

$K^2=\dfrac{\sin^2 x}{(1+\cos^2 x)^3}=\dfrac{\sin^2 x}{(2-\sin^2 x)^3}$， …………9 分

令$t=2-\sin^2 x$，则$t\in[1,2]$，$K^2=\dfrac{2-t}{t^3}$

设$p(t)=\dfrac{2-t}{t^3}$，则$p'(t)=\dfrac{-t^3-3t^2(2-t)}{t^6}=\dfrac{2t-6}{t^4}$，

显然当$t\in[1,2]$时，$p'(t)<0$，$p(t)$递减，所以$p(t)_{\max}=p(1)=1$．K^2最大值为 1，

所以K的最大值为 1． …………12 分

21.（12 分）

解：（1）设方案甲与方案乙的用水量分别为 x, z，则由题意得

$\dfrac{x+0.8}{x+1}=0.99$，解得 $x=19$， ……………2 分

由 $c=0.95$ 得方案乙初次用水量为 3，第二次用水量 y 满足 $\dfrac{y+0.95a}{y+a}=0.99$，

解得 $y=4a$，所以 $z=4a+3$， ……………4 分

即两种方案的用水量分别为 19 和 $4a+3$，

因为 $1\le a\le 3$ 时，$x-z=19-4a-3=4(4-a)>0$，

所以 $x>z$，所以方案乙的用水量较少； ……………6 分

（2）设初次与第二次清洗的用水量分别为 x 与 y，

类似（1）得 $x=\dfrac{5c-4}{5(1-c)}, y=a(99-100c)$，

所以 $x+y=\dfrac{5c-4}{5(1-c)}+a(99-100c)$

$=\dfrac{1}{5(1-c)}+100a(1-c)-a-1$，

当 a 为定值时，

$x+y\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{5(1-c)}\cdot 100a(1-c)}-a-1=-a+4\sqrt{5a}-1$，

当且仅当 $\dfrac{1}{5(1-c)}=100a(1-c)$ 时取等号，

此时 $c=1+\dfrac{1}{10\sqrt{5a}}$ 不合题意舍去，或 $c=1-\dfrac{1}{10\sqrt{5a}}\in(0.8,0.99)$， ……………9 分

将 $c=1-\dfrac{1}{10\sqrt{5a}}$ 代入 $x=\dfrac{5c-4}{5(1-c)}, y=a(99-100c)$，

得 $x=2\sqrt{5a}-1>a-1, y=2\sqrt{5a}-a$，

所以 $c=1-\dfrac{1}{10\sqrt{5a}}$ 时总用水量最少，

此时第一次与第二次用水量分别为 $2\sqrt{5a}-1$ 和 $2\sqrt{5a}-a$，

最少用水量为 $T(a)=2\sqrt{5a}-1+2\sqrt{5a}-a=-a+4\sqrt{5a}-1$，

当 $1\le a\le 3$ 时，$T'(a)=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{a}}-1>0$，所以 $T(a)$ 在 $[1,3]$ 上为增函数，

所以随着 a 的增加，最少用水量在增加. ……………12 分

22.（12 分）

解：（1）令 $g(x)=f(x)+f(-x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}+2e^{\cos x}$． ……………2 分

由基本不等式，得 $g(x)\ge 2+2e^{\cos x}$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

又 $\cos x>0$，所以 $e^{\cos x}>1$，

故 $g(x)=f(x)+f(-x)>4$；　　……………4 分

（2）$f'(x)=e^{\sin x}\cdot\cos x-e^{\cos x}\cdot\sin x$，

当 $-\dfrac{\pi}{2}<x\le 0$ 时，$\sin x\le 0,\cos x>0,e^{\sin x}>0,e^{\cos x}>0$，则 $e^{\sin x}\cdot\cos x-e^{\cos x}\cdot\sin x>0$，

所以 $f'(x)>0$，　　………………6 分

当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f'(x)=e^{\sin x}\cdot\cos x-e^{\cos x}\cdot\sin x=\sin x\cdot\cos x\left(\dfrac{e^{\sin x}}{\sin x}-\dfrac{e^{\cos x}}{\cos x}\right)$，

设 $p(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$x\in(0,1)$，则 $p'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}<0$，

所以 $p(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减． ………………8 分

由 $\sin x,\cos x\in(0,1)$ 且 $\sin x<\cos x$，得 $p(\sin x)>p(\cos x)$，得 $\dfrac{e^{\sin x}}{\sin x}>\dfrac{e^{\cos x}}{\cos x}$，

又 $\sin x\cos x>0$，则 $f'(x)>0$，

当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，

当 $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x,\cos x\in(0,1)$ 且 $\sin x>\cos x$，得 $p(\sin x)<p(\cos x)$，得 $\dfrac{e^{\sin x}}{\sin x}<\dfrac{e^{\cos x}}{\cos x}$．

又 $\sin x\cos x>0$，则 $f'(x)<0$．　　………………10 分

综上，$f'(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上恒大于 0，在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒小于 0.

则 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 单调递增，在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，

因此 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的唯一极大值点，且 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

………………11 分

故 $f(x)$ 有极大值，极大值为 $2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，无极小值． ………………12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq。**

微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索