

机密★启用前

试卷类型 A

山东名校考试联盟
2023—2024 学年高三年级上学期期中检测
数学试题

2023.11

本试卷共 4 页,22 小题,满分 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前,考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用 2B 铅笔将试卷类型(A)填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案,答案不能答在试卷上.
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案;不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.
4. 考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后,将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 3| \leq 3\}$, 集合 $A = \{2, 4\}$, 则 $\complement_U A =$
A. $\{2, 4\}$ B. $\{1, 3, 5, 6\}$ C. $\{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$ D. $\{0, 1, 3, 5, 6\}$.
2. 复数 $\frac{11+10i}{3-2i}$ 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知函数 $f(x) = x + \frac{2}{x}$, p : 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2, +\infty)$, q : 函数 $f(x)$ 的值域为 $[3, +\infty)$, 则
A. p 是 q 的充分不必要条件
B. p 是 q 的必要不充分条件
C. p 是 q 的充要条件
D. p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件

高三数学试题 第 1 页 (共 4 页)

4. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)$ 的值为

- A. $\frac{5}{9}$ B. $-\frac{5}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

5. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $-a_1, \frac{3}{4}a_2, a_3$ 成等差数列, 若 $a_1 = 1$, 则 $S_4 =$

- A. $\frac{5}{8}$ 或 15 B. $\frac{5}{8}$ 或 -5 C. 15 D. $\frac{5}{8}$

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (4a-1)x-1, & x \leq 1 \\ a^{1-x}, & x > 1 \end{cases}$ 为 \mathbf{R} 上的单调递增函数, 则 a 的取值范围是

- A. $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ C. $(1, +\infty)$ D. $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

7. 在 $\triangle ABC$ 中 $AB = 2AC$, $\angle BAC$ 的平分线 AD 交边 BC 于点 D , 记 $\overrightarrow{AC} = a, \overrightarrow{AD} = b$, 则 $\overrightarrow{AB} =$

- A. $\sqrt{3}a - 2b$ B. $-2a + 3b$ C. $3a + 2b$ D. $2a + 3b$

8. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$, 满足 $f'(x) + \frac{2f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$, 且 $f(e) = \frac{1}{2e}$, 若 $a =$

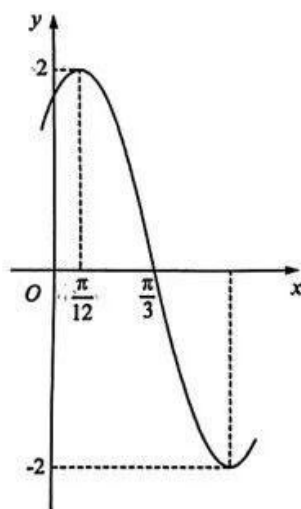
$f\left(\frac{1}{e}\right), b = f\left(\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\right), c = f(\ln\sqrt{2})$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $c > b > a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 下列说法正确的是

- A. $f(0) = \sqrt{3}$
 B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称
 C. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递减
 D. 将函数 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得图象关于 y 轴对称





10. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 前 n 项和为 S_n . 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 前 n 项和为 T_n . ($n \in \mathbf{N}^*$) 下列说法错误的有
- A. T_n 一定是关于 n 的二次函数.
 B. 若 $b_m + b_n = b_p + b_q$, 则 $m + n = p + q$.
 C. $a_1 > 0, q > 1$ 是 $\{a_n\}$ 为单调递增数列的充分不必要条件.
 D. 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 一定是等比数列.
11. 若实数 a, b 满足 $a^2 + b^2 - mab = 9, m \in \mathbf{R}$, 则
- A. 当 $m = 1$ 时, $a^2 + b^2$ 有最大值
 B. 当 $m = 3$ 时, ab 有最大值
 C. 当 $m = 1$ 时, $a + b$ 有最小值
 D. 当 $m = 3$ 时, $a^2 + b^2$ 有最小值
12. 已知函数 $f(x) = (x + 1)e^x, g(x) = \frac{(x - 1)^2}{e^x}$, 则下列结论正确的是
- A. 函数 $g(x)$ 的值域是 $\left[0, \frac{4}{e}\right]$.
 B. 若 $F(x) = f(x) - xe^x - \ln x - 2$, 则 $F(x) > 0$.
 C. 若 $G(x) = \begin{cases} f(x), & x < 0 \\ g(x), & x \geq 0 \end{cases}$, 则方程 $e^2 \cdot [G(x)]^2 - (e^2 + 1)|G(x)| + 1 = 0$ 共有 5 个实根.
 D. 不等式 $g(x) - ax + a \leq 0$ 在 $(-\infty, 1)$ 上有且只有 3 个整数解, 则 a 的取值范围是 $[-4e^3, -3e^2]$.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2f'\left(\frac{1}{2}\right)x + \ln x$, 则 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线方程为 _____.
14. 函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 且 $f(x + 1)$ 为偶函数, $f(x + 2)$ 是奇函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 则 $f(2023) =$ _____.
15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos^2 C - \cos^2 B + \sin^2 A = \sin A \sin B = \frac{1}{2}$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则边 c 的值为 _____.
16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \angle BAC = \frac{1}{6}$, BC, AC 边上的两条中线分别为 AM, BN , 若 $AM \perp BN$, 则 $\frac{AC}{AB} =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{1}{a}$, 且 $a = 2\sqrt{2}, c > a > b$.
- (1) 求 bc 的值;
 (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \sqrt{7}$, 求 b, c 的值.

18. (12分) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n} a_n, (n \in \mathbf{N}^*)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n .

19. (12分) 已知函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若函数 $y = f(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = a(1-x)$ 有且只有一个交点, 求 a 的取值范围.

20. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, \vec{m} = (b, a), \vec{n} =$

$(\cos \frac{A+C}{2}, \cos(\frac{3\pi}{2} + A))$, 且 $\vec{m} \parallel \vec{n}$.

(I) 若 $c = 4, b = \sqrt{7}a$, 求 $\triangle ABC$ 的周长;

(II) 若 $\vec{BM} = 2\vec{MA}, |\vec{CM}| = \sqrt{6}$, 求 $a + c$ 的取值范围.

21. (12分) 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ 且点 $(a_n, a_{n+1}) (n \in \mathbf{N}^*)$ 在函数 $f(x) =$

$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ 的图像上, 且 $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n - 1}$

(1) 证明 $\{\log_3 b_n\}$ 是等比数列. 并求 b_n .

(2) 令 $c_n = a_n - 1$, 设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 证明 $S_n < \frac{3}{2}$.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + (1+2a)x + 2\ln x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若方程 $f(x) = e^{-ax} + \frac{1}{2}ax^2$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 证明: $2x_1 \cdot x_2 < e(x_1 + x_2)$

- A. $\frac{5}{9}$ B. $-\frac{5}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

答案 B

解析 $\because \cos\left(2a + \frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(2a + \frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\left(2a + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin^2\left(a + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -\frac{5}{9}$.

故选 B.

5. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $-a_1, \frac{3}{4}a_2, a_3$ 成等差数列, 若 $a_1=1$, 则 $S_4=(\quad)$.

- A. $\frac{5}{8}$ 或 15 B. $\frac{5}{8}$ 或 -5 C. 15 D. $\frac{5}{8}$

答案 C

解析 由题意可得 $\frac{3}{2}a_2 = -a_1 + a_3$, 又 $\{a_n\}$ 为等比数列, 设公比为 q

$$\frac{3}{2}a_1q = -a_1 + a_1q^2, \text{ 即 } 2q^2 - 3q - 2 = 0, (2q + 1)(q - 2) = 0.$$

解得 $q = -\frac{1}{2}$ (舍), $q = 2$, $\therefore S_4 = \frac{1-2^4}{1-2} = 15$. 故选 C

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x-1, & x \leq 1 \\ a^{x-1}, & x > 1 \end{cases}$ 为 R 上的单调递增函数, 则 a 的取值范围是 (\quad)

- A: $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ B: $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ C: $(1, +\infty)$ D: $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

答案 D

解析 \because 函数 $f(x)$ 为 R 上的增函数, $\therefore \begin{cases} 4a-1 > 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$ 且 $4a-2 \leq 1$, 解得 $\frac{1}{4} < a \leq \frac{3}{4}$. 故选 D.

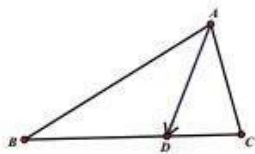
7. 在 $\triangle ABC$ 中 $AB=2AC$, $\angle BAC$ 的平分线 AD 交边 BC 于点 D , 记 $\vec{AC} = \mathbf{a}$, $\vec{AD} = \mathbf{b}$, 则 $\vec{AB} = (\quad)$

- A. $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ B. $-2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ C. $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ D. $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$

答案 B

解析 $\triangle ABC$ 中 $AB=2AC$, $\angle BAC$ 的平分线交边 AB 于点 D , 则 $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = 2$, $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB}$, 即 $\vec{AB} =$

$-2\vec{AC} + 3\vec{AD} = -2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$. 故选 B.



8. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$, 满足 $f'(x) + \frac{2f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$, 且 $f(e) = \frac{1}{2e}$, 若 $a = f\left(\frac{1}{e}\right)$,

$b = f\left(\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}\right)$, $c = f(\ln\sqrt{2})$, 则 a, b, c 的大小关系是 (\quad)

A: $a > b > c$ B: $a > c > b$ C: $b > c > a$ D: $c > b > a$

答案 C

解析

由已知可得: $x^2 f'(x) + 2xf(x) = \ln x$,

令 $g(x) = x^2 f(x)$, 则 $g'(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x) = \ln x$,

且 $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, $f'(x) = \frac{xg'(x) - 2g(x)}{x^3} = \frac{x \ln x - 2g(x)}{x^3}$,

再令 $h(x) = x \ln x - 2g(x)$, 则 $h'(x) = 1 + \ln x - 2g'(x) = 1 - \ln x$,

\therefore 当 $x \in (0, e)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 为减函数;

$\therefore h(x) \leq h(e) = e - 2g(e) = e - 2e^2 f(e) = 0$

$\therefore f'(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立; $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数;

又因为 $\frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$, $\frac{\sqrt{2} \ln 2}{4} = \frac{\ln \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\ln \sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2}$

故令 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$, $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $x \in (0, e)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 为增函数;

$\therefore \frac{1}{e} > \frac{\ln \sqrt{2}}{\sqrt{2}} > \frac{\sqrt{2} \ln 2}{4}$

$\therefore a < c < b$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

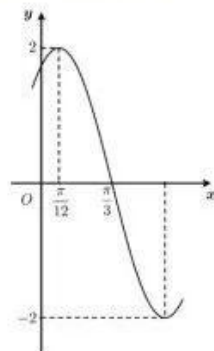
9. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 下列说法正确的是 ()

A. $f(0) = \sqrt{3}$

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}]$ 上单调递减

D. 将函数 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得图象关于 y 轴对称



答案 AC

解析 由图可知 $A = 2$, $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$, 所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 2$. 则 $f(x) = 2 \sin(2x + \varphi)$.

将点 $(\frac{\pi}{12}, 2)$ 代入得: $2 \sin(\frac{\pi}{6} + \varphi) = 2$, 所以 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 所以 $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

对于 A, 因为 $f(0) = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, 故 A 正确.



对于 B, 因为 $f(-\frac{\pi}{6}) = 2\sin(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = 0$, 故 B 不正确;

对于 C, 因为 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]$.

所以函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}]$ 上单调递减, 故 C 正确;

对于 D, 将函数 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位,

可得函数 $y = 2\sin[2(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{3}] = 2\sin(2x + \frac{2\pi}{3})$, 不关于 y 轴对称, 故 D 错误.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 前 n 项和为 T_n , ($n \in \mathbb{N}^*$) 下列说法错误的有 ().

A. T_n 一定是关于 n 的二次函数.

~~B. $a_m + a_n = b_p + b_q$, 则 $m+n=p+q$.~~

C. $a_1 > 0, q > 1$ 是 $\{a_n\}$ 为单调递增数列的充分不必要条件.

D. 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 一定是等比数列.

答案 ABD

解析 AB 项, 当 $d=0$ 时不成立. C 项当 $a_1 > 0, q > 1$ 则 $\{a_n\}$ 为单调递增数列. 当 $\{a_n\}$ 为单调递增数列时也可能 $a_1 < 0, -1 < q < 0$

D 项当 $q=-1$ 时不成立.

11. 若实数 a, b 满足 $a^2 + b^2 - mab = 9, m \in \mathbb{R}$, 则 ().

- A. 当 $m=1$ 时, $a^2 + b^2$ 有最大值 B. 当 $m=3$ 时, ab 有最大值
C. 当 $m=1$ 时, $a+b$ 有最小值 D. 当 $m=3$ 时, $a^2 + b^2$ 有最小值

答案 ACD

解析 当 $m=1$ 时, $a^2 + b^2 - ab = 9, a^2 + b^2 = 9 + ab \leq 9 + \frac{a^2 + b^2}{2}, a^2 + b^2 \leq 18$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立, $a^2 + b^2$ 有最大值, 最大值为 18, 选项 A 正确;

当 $m=3$ 时, $a^2 + b^2 - 3ab = 9$, 设 $ab=k(k>0)$, 则 $a^2 + b^2 - 3ab = 9$ 化为 $a^2 + \frac{k^2}{a^2} - 3k = 9, a^4 + (9+3k)a^2 + k^2 = 0$,

因为 $\Delta = (9+3k)^2 - 4k^2 = 81 + 54k + 5k^2 > 0$, 所以方程 $a^4 + (9+3k)a^2 + k^2 = 0$ 有解, 所以 ab 没有最大值, 选项 B 错误;

当 $m=1$ 时, $a^2 + b^2 - ab = 9, (a+b)^2 = 9 + 3ab \leq 9 + \frac{3}{4}(a+b)^2, (a+b)^2 \leq 36, -6 \leq a+b \leq 6$, 当且仅当 $a=b=3$ 时 $a+b=6, a=b=-3$ 时 $a+b=-6, a+b$ 有最小值, 最小值为 -6 , 选项 C 正确;

当 $m=3$ 时, $a^2 + b^2 - 3ab = 9, a^2 + b^2 = 9 + 3ab \geq 9 + 3(-\frac{a^2 + b^2}{2}), a^2 + b^2 \geq \frac{18}{5}$, 当且仅当 $a=-b$ 时等号成立, $a^2 + b^2$

有最小值，最大值为 $\frac{18}{5}$ ，选项D正确. 故选ACD.

12.

已知函数 $f(x) = (x+1)e^x, g(x) = \frac{(x-1)^2}{e^x}$, 则下列结论正确的是 ()

A: 函数 $g(x)$ 的值域是 $\left[0, \frac{4}{e}\right]$.

B: 若 $F(x) = f(x) - xe^x - \ln x - 2$, 则 $F(x) > 0$.

C: 若 $G(x) = \begin{cases} f(x), & x < 0 \\ g(x), & x \geq 0 \end{cases}$, 则方程 $e^2 \cdot [G(x)]^2 - (e^2 + 1)G(x) + 1 = 0$ 共有5个实根.

D: 不等式 $g(x) - ax + a < 0$ 在 $(-\infty, 1)$ 上有且只有3个整数解, 则 a 的取值范围是 $[-4e^3, -3e^2]$.

答案: BD

解析

对于函数 $g(x) = \frac{(x-1)^2}{e^x}$, $g'(x) = \frac{2(x-1) - (x-1)^2}{e^{2x}} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{e^{2x}}$. 当 $x \in (-\infty, 1)$ 和 $(3, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为减函数; 当 $x \in (1, 3)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数; 值域为 $[0, +\infty]$, 选项A错;

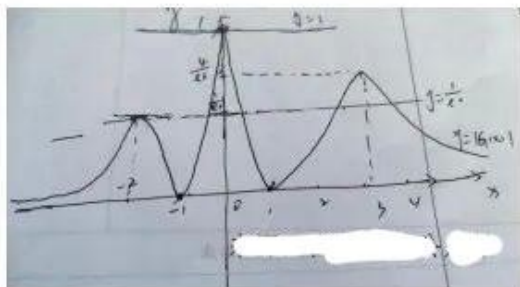
由已知 $F(x) = e^x - \ln x - 2, F'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, 显然在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $F'(1) = e - 1 > 0$,

$F'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - 2 < 0, \therefore \exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 使 $F'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $F'(x) < 0, F(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0, F(x)$ 单调递增, $\therefore F(x) \geq F(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - 2 = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 > 0$,

选项B正确;

C: 方程 $e^2 \cdot [G(x)]^2 - (e^2 + 1)G(x) + 1 = 0$ 的两根为 $|G(x)| = 1$ 或 $|G(x)| = \frac{1}{e^2}$, 而函数 $|G(x)|$ 的图象如下



由图象可知选项C项错误;



不等式 $g(x) - ax + a = \frac{(x-1)^2}{e^x} - a(x-1) < 0$, 当 $x < 1$ 时, 不等式可化为 $\frac{x-1}{e^x} - a > 0$,

令 $h(x) = \frac{x-1}{e^x} - a$, 则 $h'(x) = \frac{2-x}{e^x}$, 当 $x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为增函数, 则 $h(x) > 0$

在 $(-\infty, 1)$ 上的 3 个整数解为 $-2, -1, 0$, $\therefore \begin{cases} h(-2) > 0 \\ h(-3) \leq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{-3}{e^{-2}} - a > 0 \\ \frac{-4}{e^{-3}} - a \leq 0 \end{cases}$ 解得 $-4e^3 \leq a < -3e^2$, 故选项 D 正确.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2f'\left(\frac{1}{2}\right)x + \ln x$, 则 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线方程为

答案 $3x + y + 2 = 0$

解析

对 $f(x)$ 求导可得, $f'(x) = 2x + 2f'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{x}$, 则 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2f'\left(\frac{1}{2}\right) + 2$, 解得 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

$\therefore f(x) = x^2 - 6x + \ln x \therefore f(1) = -5; f'(x) = 2x - 6 + \frac{1}{x}, f'(1) = -3$

\therefore 切线方程为 $y + 5 = -3(x - 1)$, 整理得 $3x + y + 2 = 0$

14. 函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的函数, 且 $f(x+1)$ 为偶函数, $f(x+2)$ 是奇函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 3x - 1$, 则 $f(2023)$

答案 -2

解析 $\because f(x+1)$ 是偶函数, $f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x)$ 以 $x = \frac{1}{2}$ 为对称轴,

以 $(2, 0)$ 为对称中心, $\therefore T = 4, f(2023) = f(3) = -f(1) = -2$

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\cos^2 C - \cos^2 B + \sin^2 A = \sin A \sin B = \frac{1}{2}$,

且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则边 c 的值为_____.

答案 $\sqrt{6}$.

解析 $\cos^2 C - \cos^2 B + \sin^2 A = \sin A \sin B$.

$\therefore 1 - \sin^2 C - (1 - \sin^2 B) + \sin^2 A = \sin A \sin B$,

即 $\sin^2 B + \sin^2 A - \sin^2 C = \sin A \sin B$.

由正弦定理角化边得 $b^2 + a^2 - c^2 = ab$.

$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}, \therefore C = \frac{\pi}{3}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

$$\therefore \frac{ab}{\sin A \sin B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} \text{ 即 } \frac{ab}{2} = \frac{c^2}{\sin^2 \frac{\pi}{3}}, \text{ 化简得 } c^2 = \frac{3}{2} ab.$$

又 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{3} \therefore ab = 4 \therefore c^2 = 6$ 解得 $c = \sqrt{6}$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos \angle BAC = \frac{1}{6}$, BC , AC 边上的两条中线分别为 AM , BN , 若 $AM \perp BN$, 则

$$\frac{AC}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案 $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

解析 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\because AM \perp BN, \therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$,

$$\therefore \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0,$$

化简得 $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0, b^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2a^2 = 0, |\mathbf{b}|^2 - \frac{1}{6}|\mathbf{a}||\mathbf{b}| - 2|\mathbf{a}|^2 = 0,$

$$\frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{a}|^2} - \frac{1}{6} \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} - 2 = 0, \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} = -\frac{4}{3} \text{ (舍)}. \therefore \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}.$$

四、解答题: 本题共 6 小题 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{1}{a}$, 且 $a = 2\sqrt{2}, c > a > b$.

(1) 求 bc 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \sqrt{7}$, 求 b, c 的值.

解: (1) (法一) 由题意, 结合余弦定理得, $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2abc} = \frac{1}{a}$,2分

所以 $bc = a^2 = 8$ 4分

(法二) 由题意, 结合正弦定理得 $\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{1}{\sin A}$,2分

即 $\frac{\sin C \cos B + \sin B \cos C}{\sin B \sin C} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{1}{\sin A}$,

$$\sin^2 A = \sin B \sin C,$$

$\therefore bc = a^2 = 8$ 4分

(2) 由于 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = 4 \sin A = \sqrt{7}$, $\therefore \sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 5分

又 $Q c > a > b \therefore A$ 为锐角, 即 $\cos A = \frac{3}{4}$ 6分

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - 3bc}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - 24}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore b+c=6, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{又 } b \cdot c = 8, c > a > b, \therefore b=2, c=4 \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

18. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n} a_n, (n \in \mathbb{N}^*)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n .

解: (1) 方法 1: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{n}$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2, \frac{a_n}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2^{n-1} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\therefore a_n = n \cdot 2^{n-1} \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

又 $a_1=1$ 也适合上式. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

$$\therefore a_n = n \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*) \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

方法 2: $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n} \dots\dots\dots 2 \text{分}$

$\therefore \{\frac{a_n}{n}\}$ 为公比为 2 首项为 1 的等比数列. $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

$$\therefore \frac{a_n}{n} = 2^{n-1} \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\therefore a_n = n \cdot 2^{n-1} \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

(2) 由 (1) 知,

$$S_n = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} \textcircled{1} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$2S_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n \textcircled{2} \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}, -S_n = 1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$= \frac{1-2^n}{1-2} - n \cdot 2^n$$

$$= 2^n - 1 - n \cdot 2^n \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\therefore S_n = (n-1) \cdot 2^n + 1 \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

【说明】(1) 第一问方法 1 不验证 $n=1$ 扣 1 分

方法2有4分点, 不看3分点;

(2)第二问错位相减法按步骤给分;

19. 【详解】(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2$, $f'(x) = 3x^2 + 4x - a$,1分

因为函数 $y = f(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) = 3x^2 + 4x - a \geq 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立,2分

即 $a \leq (3x^2 + 4x)_{\min}$,3分

$y = 3x^2 + 4x$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上单调递增,

当 $x = 1$ 时, $(3x^2 + 4x)_{\min} = 7$,4分

所以 a 的取值范围 $(-\infty, 7]$5分

(2) $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2$ 与 $y = a(1-x)$ 有且只有一个交点,

即 $x^3 + 2x^2 - ax + 2 = a(1-x)$ 只有一个根,6分

$x^3 + 2x^2 + 2 = a$ 只有一个根

令 $h(x) = x^3 + 2x^2 + 2$, 所以 $h(x)$ 的图象与 $y = a$ 的图象只有一个交点,7分

$h'(x) = 3x^2 + 4x$, 令 $h'(x) > 0$, 解得 $x < -\frac{4}{3}$ 或 $x > 0$,

令 $h'(x) < 0$, 解得 $-\frac{4}{3} < x < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{4}{3})$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, $(-\frac{4}{3}, 0)$ 上单调递减,9分

所以 $h(x)_{\text{极大值}} = h(-\frac{4}{3}) = \frac{86}{27}$, $h(x)_{\text{极小值}} = h(0) = 2$,10分

又因为 $h(x)$ 的图象与 $y = a$ 的图象只有一个交点,

所以 $a \in (-\infty, 2) \cup (\frac{86}{27}, \infty)$12分

【说明】(1) 有3分点, 不看2分点, 有5分点, 不看4分点, 第一问不分参求解对应得分;

(2) 第二问有7分点, 不看6分点;

(3) a 的取值范围求对一半扣1分.

20. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\vec{m} = (b, a)$,

$$\vec{n} = \left(\cos \frac{A+C}{2}, \cos \left(\frac{3\pi}{2} + A \right) \right), \text{ 且 } \vec{m} \parallel \vec{n}.$$

(1) 若 $c=4$, $b=\sqrt{7}a$, 求 $\triangle ABC$ 的周长;

(2) 若 $\overline{BM} = 2\overline{MA}$, $|\overline{CM}| = \sqrt{6}$, 求 $a+c$ 的取值范围.

解: 因为 $\vec{m} \parallel \vec{n}$, 故 $b \cos \left(\frac{3\pi}{2} + A \right) = a \cos \frac{A+C}{2}$

由正弦定理得, $\sin B \sin A = \sin A \cos \frac{A+C}{2}$ 1分

又 $\sin A \neq 0$, 则 $\sin B = \cos \frac{A+C}{2} = \cos \frac{\pi-B}{2} = \sin \frac{B}{2}$ 2分

即 $2\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2}$, 而 $\sin \frac{B}{2} \neq 0$, 故 $\cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, 故 $B = \frac{2\pi}{3}$ 3分

(i) 由余弦定理得, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 即 $7a^2 = a^2 + 16 - 2a \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$, 整理得

$$3a^2 - 2a - 8 = 0, \text{4分}$$

解得 $a = 2$ 或 $\frac{4}{3}$ (舍去), $b = 2\sqrt{7}$, 故 $\triangle ABC$ 的周长为 $6 + 2\sqrt{7}$5分

(ii) 设 $\angle BCM = a \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $\angle BMC = \frac{\pi}{3} - a$.

由正弦定理得, $\frac{BM}{\sin a} = \frac{BC}{\sin \angle BMC} = \frac{CM}{\sin B}$ 即 $\frac{\frac{2c}{3}}{\sin a} = \frac{a}{\sin \left(\frac{\pi}{3} - a\right)} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}$,6分

故 $c = 3\sqrt{2}\sin a$, $a = -\sqrt{2}\sin a + \sqrt{6}\cos a$,

所以 $a + c = 2\sqrt{2}\sin a + \sqrt{6}\cos a = \sqrt{14}\sin(a + \varphi)$,7分

其中 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$8分

$\therefore 0 < a < \frac{\pi}{3}$, $\therefore \varphi < a + \varphi < \frac{\pi}{3} + \varphi$,

又 $\because \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{4}, \therefore \varphi + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$, 则当 $a + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $a + c$ 取得最大值 $\sqrt{14}$, ...9分

又 $\because \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) = \sin \varphi \cos \frac{\pi}{3} + \cos \varphi \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{21}}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{7}}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$ 10分

$\therefore \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{21}}{14} > \sin \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 11分

所以 $a + c$ 的取值范围为 $(\frac{\sqrt{21}}{7}, \sqrt{14}]$ 12分

21. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 满足 $a_1 = 2$ 且点 $(a_n, a_{n+1}) (n \in \mathbb{N}^*)$ 在函数 $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ 的图像上, 且 $b_n =$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n - 1}$$

(1) 证明 $\{\log_3 b_n\}$ 是等比数列, 并求 b_n .

(2) 令 $c_n = a_n - 1$, 设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 证明 $S_n < \frac{3}{2}$.

解: (1) $\because (a_n, a_{n+1})$ 在函数 $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ 上,

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

$$\text{又 } b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n - 1}, \therefore b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1} - 1} = \frac{\frac{a_n^2 + 2a_n + 1}{2a_n}}{\frac{a_n^2 - 2a_n + 1}{2a_n}} = (\frac{a_n + 1}{a_n - 1})^2$$

$$\therefore b_{n+1} = b_n^2 \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

两边取以 3 为底的对数,

$$\log_3 b_{n+1} = 2 \log_3 b_n \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\text{又 } b_1 = \frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} = 3, \log_3 b_1 = 1 \text{ 来源: 高三标答公众号}$$

$\therefore \{\log_3 b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列.....5分

$$\therefore \log_3 b_n = 2^{n-1}, \therefore b_n = 3^{2^{n-1}} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$(2) \because b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n - 1}, \therefore a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n - 1} = \frac{3^{2^n - 1} + 1}{3^{2^n - 1} - 1} \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\therefore c_n = a_n - 1 = \frac{3^{2^n - 1} + 1 - 3^{2^n - 1} + 1}{3^{2^n - 1} - 1} = \frac{2}{3^{2^n - 1} - 1} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{则 } \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3^{2n-1} - 1}{3^{2n} - 1} = \frac{3^{2n-1} - 1}{(3^{2n-1})^2 - 1} = \frac{1}{3^{2n-1} + 1} < \frac{1}{3^{2n-1}} < \frac{1}{3}$$

$$\therefore c_{n+1} < \frac{1}{3}c_n, \dots\dots\dots 10 \text{ 分 又 } c_1 = 1.$$

$$S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n < c_1 + \frac{1}{3}c_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2c_1 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}c_1$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] < \frac{3}{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

【说明】(1) 第一问不求 $\log_3 b_1 = 1$, 不说明首项公比只下定义说 $\{\log_3 b_n\}$ 是等比数列不扣分

(2) 第二问 8 分之后的证明 $c_{n+1} < \frac{1}{3}c_n$ 其他方法酌情给分

22. 【详解】(1) $f'(x) = ax + (1+2a) + \frac{2}{x} = \frac{ax^2 + (1+2a)x + 2}{x} = \frac{(ax+1)(x+2)}{x}$, 定义域为 $(0, +\infty)$ 1 分

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; $\dots\dots\dots 2$ 分

当 $a < 0$ 时, $x \in (0, -\frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增,

$x \in (-\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减; $\dots\dots\dots 3$ 分

综上, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减. $\dots\dots\dots 4$ 分

(2) 方程 $f(x) = e^{-ax} + \frac{1}{2}ax^2$ 即 $(1+2a)x + 2\ln x = e^{-ax}$, 即 $x + \ln x = -2ax + e^{-ax}$.

即 $e^{\ln x} + 2\ln x = e^{-ax} + 2(-ax)$,

令 $g(x) = e^x + 2x$, 则 $g(\ln x) = g(-ax) \dots\dots\dots 5$ 分

因为 $g'(x) = e^x + 2 > 0$, 所以 $g(x) = e^x + 2x$ 在 \mathbb{R} 上单调递增,

所以 $\ln x = -ax$, 即 $a = -\frac{\ln x}{x}$, 所以 $a = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x} \dots\dots\dots 6$ 分

因为 x_1, x_2 是方程 $f(x) = e^{-ax} + \frac{1}{2}ax^2$ 的两个实根, 所以 x_1, x_2 是方程 $a = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x}$ 的两个实根,

即 $a = \frac{1}{x_1} \cdot \ln \frac{1}{x_1}, a = \frac{1}{x_2} \cdot \ln \frac{1}{x_2}$, 所以 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ 是方程 $a = x \cdot \ln x$ 的两个实根. $\dots\dots\dots 7$ 分

令 $h(x) = x \cdot \ln x$, 则 $h'(x) = \ln x + 1$

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;

$h(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}, h(1) = 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0 \dots\dots\dots 8$ 分

令 $m = \frac{1}{x_1}, n = \frac{1}{x_2}$, 不妨设 $m < n$, 则 $0 < m < \frac{1}{e} < n < 1$,

要证 $2x_1 \cdot x_2 < e(x_1 + x_2)$, 即证 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{2}{e}$, 即证 $m + n > \frac{2}{e} \dots\dots\dots 9$ 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

