2023—2024 学年第一学期期中考试高三数学试题

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项:

1.答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”

2.作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知全集 $U=\{x\in N||x-3|\leqslant 3\}$，集合 $A=\{2,4\}$，则 $C_UA=(\quad)$

A．$\{2,4\}$　　B．$\{1,3,5,6\}$　　C．$\{0,1,2,3,5,6\}$　　D．$\{0,1,3,5,6\}$．

答案　D

解析　$U=\{x\in N||x-3|\leqslant 3\}=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，$C_UA=\{0,1,3,5,6\}$．故选 D.

2.复数 $\dfrac{11+10i}{3-2i}$ 在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

答案　A

解析　因为 $\dfrac{11+10i}{3-2i}=\dfrac{(11+10i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=1+4i$，所以复数 z 在复平面内对应的点是(1，4)，位于第一象限．

3.已知函数 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$，p：函数 f(x)的定义域为$[2,+\infty)$，q：函数 f(x)的值域为$[3,+\infty)$，则(　　)

A.p 是 q 的充分不必要条件

B. p 是 q 的必要不充分条件

C. p 是 q 的充要条件

D. p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件

答案　A

解析　函数 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$ 在$(-\infty,\ -\sqrt{2})$，$(\sqrt{2},+\infty)$单调递增，在$(-\sqrt{2},\ 0)$，$(0,\ \sqrt{2})$单调递减，

若函数 f(x)的定义域为$[2,+\infty)$，则函数 f(x)的值域为$[3,+\infty)$，

反之不成立，例如若函数 f(x)的定义域为$(0,1)\cup[2,+\infty)$，函数 f(x)的值域也为$[3,+\infty)$，故选 A.

4.已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，则 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ 的值为（　　）

A．$\frac{5}{9}$　B．$-\frac{5}{9}$　C．$\frac{1}{3}$　D．$-\frac{1}{3}$

答案 B

解析 $\because \cos\left(2\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})-1=-\frac{5}{9}$.

故选 B.

5.各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$-a_1$，$\frac{3}{4}a_2$，a_3成等差数列，若$a_1=1$，则$S_4=$(　).

A.$\frac{5}{8}$或 15　　B.$\frac{5}{8}$或-5　　C.15　　D.$\frac{5}{8}$

答案 C

解析 由题意可得$\frac{3}{2}a_2=-a_1+a_3$，又$\{a_n\}$为等比数列.设公比为 q

$\frac{3}{2}a_1q=-a_1+a_1q^2$，即$2q^2-3q-2=0$，$(2q+1)(q-2)=0$.

解得$q=-\frac{1}{2}$(舍)，$q=2$，$\therefore S_4=\frac{1-2^4}{1-2}=15$.故选 C

6.已知函数$f(x)=\begin{cases}(4a-1)x-1, x\le 1\\ a^{1-x}, x>1\end{cases}$为$R$上的单调递增函数，则$a$的取值范围是（）

$A:\left(\frac{1}{4},1\right)$　　$B:\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$　　$C:(1,+\infty)$　　$D:\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

答案　D

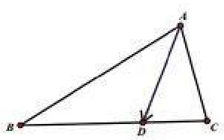
解析　$\because$函数$f(x)$为R上的增函数，$\therefore\begin{cases}4a-1>0\\ 0<a<1\end{cases}$且$4a-2\le 1$，解得$\frac{1}{4}<a\le\frac{3}{4}$．故选 D.

7.在$\triangle ABC$中$AB=2AC$，$\angle BAC$的平分线AD交边BC于点D，记$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{AB}=$(　　)

A．$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$　B．$-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$　C．$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　D．$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$

答案　B

解析　$\triangle ABC$中$AB=2AC$，$\angle BAC$的平分线交边AB于点D，则$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=2$，$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，即$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}=-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.故选 B.



8.定义在$(0,+\infty)$上的可导函数$f(x)$,满足$f'(x)+\frac{2f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x^2}$,且$f(e)=\frac{1}{2e}$,若$a=f(\frac{1}{e})$,

$b=f(\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4})$,$c=f(\ln\sqrt{2})$,则$a,b,c$的大小关系是（）

$A: a>b>c$　　$B: a>c>b$　　$C: b>c>a$　　$D: c>b>a$

答案　C

解析

由已知可得：$x^2f'(x)+2xf(x)=\ln x$,

令$g(x)=x^2f(x)$,则$g'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)=\ln x$,

且$f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, $f'(x)=\dfrac{xg'(x)-2g(x)}{x^3}=\dfrac{x\ln x-2g(x)}{x^3}$,

再令$h(x)=x\ln x-2g(x)$,则$h'(x)=1+\ln x-2g'(x)=1-\ln x$,

$\therefore$当$x\in(0,e)$时，$h'(x)>0$, $h(x)$为增函数；当$x\in(e,+\infty)$时，$h'(x)<0$, $h(x)$为减函数；

$\therefore h(x)\le h(e)=e-2g(e)=e-2e^2f(e)=0$

$\therefore f'(x)\le 0$在$(0,+\infty)$上恒成立；$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数；

又因为$\dfrac{1}{e}=\dfrac{\ln e}{e}$, $\dfrac{\sqrt{2}\ln 2}{4}=\dfrac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\ln\sqrt{2}=\dfrac{\ln 2}{2}$

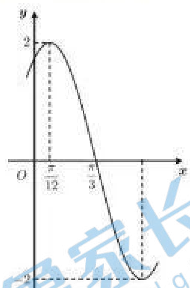
故令$\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,当$x\in(0,e)$时，$\varphi'(x)>0$, $\varphi(x)$为增函数；

$\therefore \dfrac{1}{e}>\ln\sqrt{2}>\dfrac{\sqrt{2}\ln 2}{4}$

$\therefore a<c<b$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，下列说法正确的是（　　）



A．$f(0)=\sqrt{3}$

B．函数$f(x)$的图象关于直线$x=-\dfrac{\pi}{6}$对称

C．函数$f(x)$在$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{12}\right]$上单调递减

D．将函数$f(x)$图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位所得图象关于y轴对称

答案　AC

解析　由图可知$A=2$，$\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$，所以$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$，则$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

将点$\left(\dfrac{\pi}{12},2\right)$代入得：$2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，所以$\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，所以$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，

对于A，因为$f(0)=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，故A正确；

对于B，因为$f(-\frac{\pi}{6})=2\sin(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=0$，，故B不正确；

对于C，因为$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$，所以$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$.

所以函数$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right]$上单调递减，故C正确；

对于D，将函数$f(x)$图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，

可得函数$y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，不关于$y$轴对称，故D错误.

10.已知数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，前n项和为S_n，数列$\{b_n\}$是公差为d的等差数列，前n项和为T_n，（$n\in N^*$）下列说法错误的有（ ）.

A.T_n一定是关于n的二次函数.

B.若$b_m+b_p=b_n+b_q$，则m+n=p+q.

C.$a_1>0$，$q>1$是$\{a_n\}$为单调递增数列的充分不必要条件.

D.数列$\{a_n+a_{n+1}\}$一定是等比数列.

答案 ABD

解析 AB项，当d=0时不成立。C项当$a_1>0$，$q>1$则$\{a_n\}$为单调递增数列。当$\{a_n\}$为单调递增数列时

也可能$a_1<0$，$-1<q<0$

D项当q=−1时不成立.

11.若实数a，b满足$a^2+b^2-mab=9$，m∈R，则( )

A.当m=1时，a^2+b^2有最大值　　B.当m=3时，ab有最大值

C.当m=1时，a+b有最小值　　D.当m=3时，a^2+b^2有最小值

答案 ACD

解析 当m=1时，$a^2+b^2-ab=9$，$a^2+b^2=9+ab\le 9+\frac{a^2+b^2}{2}$，$a^2+b^2\le 18$，当且仅当a=b时等号成立，$a^2+b^2$有最大值，最大值为18，选项A正确；

当m=3时，$a^2+b^2-3ab=9$，设ab=k(k>0)，则$a^2+b^2-3ab=9$化为$a^2+\frac{k^2}{a^2}-3k=9$，$a^4+(9+3k)a^2+k^2=0$，

因为$\Delta=(9+3k)^2-4k^2=81+54k+5k^2>0$，所以方程$a^4+(9+3k)a^2+k^2=0$有解，所以ab没有最大值，选项B错误；

当m=1时，$a^2+b^2-ab=9$，$(a+b)^2=9+3ab\le 9+\frac{3}{4}(a+b)^2$，$(a+b)^2\le 36$，$-6\le a+b\le 6$，当且仅当a=b=3时a+b=6，a=b=−3时a+b=−6，a+b有最小值，最小值为−6，选项C正确；

当m=3时，$a^2+b^2-3ab=9$，$a^2+b^2=9+3ab\ge 9+3(-\frac{a^2+b^2}{2})$，$a^2+b^2\ge\frac{18}{5}$，当且仅当a=−b时等号成立，$a^2+b^2$

有最小值，最大值为$\frac{18}{5}$，选项 D 正确．故选 ACD．

12．

已知函数$f(x)=(x+1)e^x, g(x)=\frac{(x-1)^2}{e^x}$,则下列结论正确的是（）

A:函数$g(x)$的值域是$\left[0,\frac{4}{e}\right]$.

B:若$F(x)=f(x)-xe^x-\ln x-2$,则$F(x)>0$.

C: 若$G(x)=\begin{cases}f(x),x<0\\g(x),x\geq 0\end{cases}$,则方程$e^2\cdot[G(x)]^2-(e^2+1)|G(x)|+1=0$共有5个实根.

D:不等式$g(x)-ax+a<0$在$(-\infty,1)$上有且只有3个整数解，则a的取值范围是$[-4e^3,-3e^2)$

答案 BD

解析

对于函数$g(x)=\frac{(x-1)^2}{e^x}$，$g'(x)=\frac{-x^2+4x-3}{e^x}=-\frac{(x-1)(x-3)}{e^x}$.当$x\in(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$时，$g'(x)<0, g(x)$为减函数；当$x\in(1,3)$时，$g'(x)>0, g(x)$为增函数；∴值域为$[0,+\infty]$，选项$A$错；

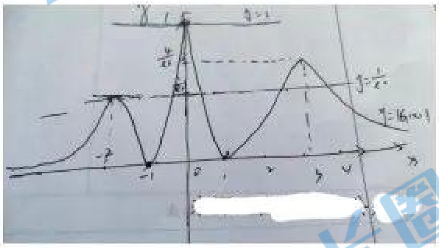
由已知$F(x)=e^x-\ln x-2, F'(x)=e^x-\frac{1}{x}$,显然在$(0,+\infty)$上为增函数，且$F'(1)=e-1>0$,

$F'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$,$\therefore\exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使$F'(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$, 当$x\in(0,x_0)$时, $F'(x)<0$,$F(x)$单调递减;

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$F'(x)>0$,$F(x)$单调递增,$\therefore F(x)\geq F(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2>0$,

选项B正确；

C:方程$e^2\cdot[G(x)]^2-(e^2+1)|G(x)|+1=0$的两根为$|G(x)|=1$或$|G(x)|=\frac{1}{e^2}$，而函数$|G(x)|$的图象如下



由图象可知选项C项错误.

不等式$g(x)-ax+a=\dfrac{(x-1)^2}{e^x}-a(x-1)<0$，当$x<1$时，不等式可化为$\dfrac{x-1}{e^x}-a>0$，

令$h(x)=\dfrac{x-1}{e^x}-a$，则$h'(x)=\dfrac{2-x}{e^x}$，当$x<1$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(-\infty,1)$上为增函数，则$h(x)>0$

在$(-\infty,1)$上的3个整数解为$-2,-1,0$，$\therefore \begin{cases} h(-2)>0 \\ h(-3)\le 0 \end{cases}$即$\begin{cases} \dfrac{-3}{e^{-2}}-a>0 \\ \dfrac{-4}{e^{-3}}-a\le 0 \end{cases}$解得$-4e^3\le a<-3e^2$，故选项$D$正确.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．已知函数$f(x)=x^2+2f'\left(\dfrac{1}{2}\right)x+\ln x$，则$f(x)$在点$(1,\ f(1))$的切线方程为

答案　3x+y+2=0

解析

对$f(x)$求导可得，$f'(x)=2x+2f'\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{x}$，则$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1+2f'\left(\dfrac{1}{2}\right)+2$，解得$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3$

$\therefore f(x)=x^2-6x+\ln x \therefore f(1)=-5$；$f'(x)=2x-6+\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=-3$

$\therefore$切线方程为$y+5=-3(x-1)$，整理得$3x+y+2=0$

14、函数$f(x)$是定义在R上的函数，且$f(x+1)$为偶函数，$f(x+2)$是奇函数，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=3x-1$，则f(2023)

答案　**-2**

解析　$\because f(x+1)$是偶函数，$f(x)$是奇函数，$\therefore f(x)$以$\mathbf{x=1}$为对称轴，

以$(\mathbf{2,0})$为对称中心，$\therefore \mathbf{T=4}$，$f(2023)=f(3)=-f(1)=-2$

15.在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\cos^2 C-\cos^2 B+\sin^2 A=\sin A\sin B=\dfrac{1}{2}$，

且$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，则边c的值为________.

答案　$\sqrt{6}$.

解析　$\cos^2 C-\cos^2 B+\sin^2 A=\sin A\sin B$，

$\therefore 1-\sin^2 C-\left(1-\sin^2 B\right)+\sin^2 A=\sin A\sin B$，

即$\sin^2 B+\sin^2 A-\sin^2 C=\sin A\sin B$，

由正弦定理角化边得$b^2+a^2-c^2=ab$，

$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$，

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

$\therefore \dfrac{ab}{\sin A\sin B}=\dfrac{c^2}{\sin^2 C}$ 即 $\dfrac{ab}{\frac{1}{2}}=\dfrac{c^2}{\sin^2\frac{\pi}{3}}$，化简得 $c^2=\dfrac{3}{2}ab$．

又 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$ $\therefore ab=4$ $\therefore c^2=6$ 解得 $c=\sqrt{6}$.

16、在 ΔABC 中，已知 $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{6}$，$BC$，$AC$ 边上的两条中线分别为 AM,BN，若 $AM\perp BN$，则 $\dfrac{AC}{AB}=$__________．

答案　$-\frac{\sqrt{2}}{10}$

解析　设 $\overline{AB}=\mathbf{a},\overline{AC}=\mathbf{b}$，则 $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),\overline{BN}=\dfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{a}$，$\because AM\perp BN$，$\therefore \overline{AM}\cdot\overline{BN}=0$，

$\therefore \dfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\dfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$,

化简得 $\dfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\dfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$, $\mathbf{b}^2-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-2\mathbf{a}^2=0,|\mathbf{b}|^2-\dfrac{1}{6}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|-2|\mathbf{a}|^2=0$,

$\dfrac{|\mathbf{b}|^2}{\mathbf{a}^2}-\dfrac{1}{6}\dfrac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}-2=0$, $\dfrac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}=\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}=-\dfrac{4}{3}$(舍)．$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{2}$．

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{1}{a}$，且 $a=2\sqrt{2},c>a>b$．

(1)求 bc 的值；

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\sqrt{7}$，求 b,c 的值．

解：(1)（法一）由题意，结合余弦定理得，$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2abc}+\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2abc}=\dfrac{1}{a}$，……………………2分

所以 $bc=a^2=8$ ……………………………………………………4分

（法二）由题意，结合正弦定理得 $\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{1}{\sin A}$，…………………2分

即 $\dfrac{\sin C\cos B+\sin B\cos C}{\sin B\sin C}=\dfrac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}=\dfrac{1}{\sin A}$，

$\sin^2 A=\sin B\sin C$,

$\therefore bc=a^2=8$ ……………………………………………………4分

(2)由于 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=4\sin A=\sqrt{7}$，$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ………………………………5分

又 $\because c>a>b$ $\therefore A$ 为锐角，即 $\cos A=\dfrac{3}{4}$ ………………………………6分

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-3bc}{2bc}=\dfrac{(b+c)^2-24}{16}=\dfrac{3}{4}$.

$\therefore b+c=6$，…………………………8 分

又 $b\cdot c=8, c>a>b$，$\therefore b=2, c=4$…………………………10 分

18．数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n}a_n$．（$n\in N^*$）

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2)求$\{a_n\}$前 n 项和S_n．

解：(1) 方法 1∵$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2(n+1)}{n}$

∴当 $n\geq 2$，$\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$…………2 分

$\therefore a_n=n\cdot 2^{n-1}$……….3 分

又 n=1 也适合上式．……….4 分

$\therefore a_n=n\cdot 2^{n-1}$（$n\in N^*$）…………5 分

方法 2：∵$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{2a_n}{n}$……….2 分

$\therefore \{\dfrac{a_n}{n}\}$为公比为 2 首项为 1 的等比数列…………3 分

$\therefore \dfrac{a_n}{n}=2^{n-1}$……..4 分

$\therefore a_n=n\cdot 2^{n-1}$……….5 分

(2) 由 (1) 知，

$S_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$①……6 分

$2S_n=\quad 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$ ②……7 分

①−②，$-S_n=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n$ ……8 分

$=\dfrac{1-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n$

$=2^n-1-n\cdot 2^n$ ……10 分

$\therefore S_n=(n-1)\cdot 2^n+1$ ……12 分

【说明】(1)第一问方法 1 不验证 n=1 扣 1 分

方法 2 有 4 分点，不看 3 分点；

(2)第二问错位相减法按步骤给分；

19．【详解】(1) $f(x)=x^3+2x^2-ax+2$，$f'(x)=3x^2+4x-a$，……………1 分

因为函数 $y=f(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)=3x^2+4x-a\ge 0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，……………2 分

即 $a\le\left(3x^2+4x\right)_{\min}$，……………3 分

$y=3x^2+4x$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $x=1$ 时，$\left(3x^2+4x\right)_{\min}=7$，……………4 分

所以 a 的取值范围 $(-\infty,7]$．……………5 分

(2) $f(x)=x^3+2x^2-ax+2$ 与 $y=a(1-x)$ 有且只有一个交点，

即 $x^3+2x^2-ax+2=a(1-x)$ 只有一个根，……………6 分

$x^3+2x^2+2=a$ 只有一个根

令 $h(x)=x^3+2x^2+2$，所以 $h(x)$ 的图象与 $y=a$ 的图象只有一个交点，……7 分

$h'(x)=3x^2+4x$，令 $h'(x)>0$，解得 $x<-\dfrac{4}{3}$ 或 $x>0$，

令 $h'(x)<0$，解得 $-\dfrac{4}{3}<x<0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，$\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$ 上单调递减，……9 分

所以 $h(x)_{极大值}=h\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{86}{27}, h(x)_{极小值}=h(0)=2$，……………10 分

又因为 $h(x)$ 的图象与 $y=a$ 的图象只有一个交点，

所以 $a\in(-\infty,2)\cup(\dfrac{86}{27},\infty)$．……………12 分

【说明】(1) 有 3 分点，不看 2 分点，有 5 分点，不看 4 分点，第一问不分参求解对应得分；

(2) 第二问有 7 分点，不看 6 分点；

(3) a 的取值范围求对一半扣 1 分．

20．(12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\vec{m}=(b,a)$，

$\vec{n}=\left(\cos\dfrac{A+C}{2},\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+A\right)\right)$，且 $\vec{m}\parallel\vec{n}$.

(1)若 $c=4$，$b=\sqrt{7}a$，求 $\triangle ABC$ 的周长；

(2)若 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，$\left|\overrightarrow{CM}\right|=\sqrt{6}$，求 $a+c$ 的取值范围.

解：因为 $\vec{m}\parallel\vec{n}$，故 $b\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+A\right)=a\cos\dfrac{A+C}{2}$，

由正弦定理得，$\sin B\sin A=\sin A\cos\dfrac{A+C}{2}$ ……………………1 分

又 $\sin A\neq 0$，则 $\sin B=\cos\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{\pi-B}{2}=\sin\dfrac{B}{2}$，……………………2 分

即 $2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=\sin\dfrac{B}{2}$，而 $\sin\dfrac{B}{2}\neq 0$，故 $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$，故 $B=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………3 分

（Ⅰ）由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $7a^2=a^2+16-2a\times 4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，整理得

$3a^2-2a-8=0$，……………………4 分

解得 $a=2$ 或 $-\dfrac{4}{3}$（舍去），$b=2\sqrt{7}$，故 $\triangle ABC$ 的周长为 $6+2\sqrt{7}$. ………5 分

（Ⅱ）设 $\angle BCM=\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\angle BMC=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$.

由正弦定理得，$\dfrac{BM}{\sin\alpha}=\dfrac{BC}{\sin\angle BMC}=\dfrac{CM}{\sin B}$ 即 $\dfrac{\frac{2c}{3}}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{2}$，…………6 分

故 $c=3\sqrt{2}\sin\alpha$，$a=-\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{6}\cos\alpha$，

所以 $a+c=2\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{6}\cos\alpha=\sqrt{14}\sin(\alpha+\varphi)$，……………………7 分

其中 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{21}}{7},\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{7}}{7},\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$ …………8 分

$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \varphi<\alpha+\varphi<\dfrac{\pi}{3}+\varphi$，

又 $\because \frac{\pi}{6}<\varphi<\frac{\pi}{4}, \therefore \varphi+\frac{\pi}{3}>\frac{\pi}{2}$，则当 $a+\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$a+c$ 取得最大值 $\sqrt{14}$，…9 分

又 $\because \sin(\varphi+\frac{\pi}{3})=\sin\varphi\cos\frac{\pi}{3}+\cos\varphi\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$ ………10 分

$\therefore \sin(\varphi+\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{21}}{14}>\sin\varphi=\frac{\sqrt{21}}{7}$ …………………………11 分

所以 $a+c$ 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{21}}{7},\sqrt{14}\right]$ …………………………12 分

21、已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足 $a_1=2$ 且点 (a_n, a_{n+1}) $(n\in N^*)$ 在函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$ 的图像上，且 $b_n=\frac{a_n+1}{a_n-1}$.

(1)证明 $\{\log_3 b_n\}$ 是等比数列，并求 b_n.

(2)令 $c_n=a_n-1$，设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n，证明 $S_n<\frac{3}{2}$.

解：(1) $\because (a_n, a_{n+1})$ 在函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$ 上，

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$，………………1 分

又 $b_n=\frac{a_n+1}{a_n-1}$，$\therefore b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\frac{\frac{a_n^2+2a_n+1}{2a_n}}{\frac{a_n^2-2a_n+1}{2a_n}}=(\frac{a_n+1}{a_n-1})^2$

$\therefore b_{n+1}=b_n^2$，………………3 分

两边取以 3 为底的对数，

$\log_3 b_{n+1}=2\log_3 b_n$…………4 分

又 $b_1=\frac{a_1+1}{a_1-1}=3$，$\log_3 b_1=1$ 来源：高三标答公众号

$\therefore \{\log_3 b_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列…………5 分

$\therefore \log_3 b_n=2^{n-1}$，　$\therefore b_n=3^{2^{n-1}}$……………6 分

(2) $\because b_n=\frac{a_n+1}{a_n-1}$，$\therefore a_n=\frac{b_n+1}{b_n-1}=\frac{3^{2^{n-1}}+1}{3^{2^{n-1}}-1}$ …………7 分

$\therefore C_n=a_n-1=\frac{3^{2^{n-1}}+1-3^{2^{n-1}}+1}{3^{2^{n-1}}-1}=\frac{2}{3^{2^{n-1}}-1}$……………8 分

则$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{3^{2^{n-1}}-1}{3^{2^n}-1}=\frac{3^{2^{n-1}}-1}{(3^{2^{n-1}})^2-1}=\frac{1}{3^{2^{n-1}}+1}<\frac{1}{3^{2^{n-1}}}<\frac{1}{3}$

$\therefore c_{n+1}<\frac{1}{3}c_n$. ……………………10 分 又$c_1=1$.

$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n<c_1+\frac{1}{3}c_1+(\frac{1}{3})^2c_1+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-1}c_1$

$=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]<\frac{3}{2}$……12 分

【说明】(1) 第一问不求 $\log_3 b_1=1$，不说明首项公比只下定义说$\{\log_3 b_n\}$是等比数列不扣分

(2) 第二问 8 分点之后的证明$c_{n+1}<\frac{1}{3}c_n$其他方法酌情给分

22.【详解】(1) $f'(x)=ax+(1+2a)+\frac{2}{x}=\frac{ax^2+(1+2a)x+2}{x}=\frac{(ax+1)(x+2)}{x}$，定义域为$(0,+\infty)$ 1 分

当$a\geq0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；……………………2 分

当$a<0$时，$x\in(0,-\frac{1}{a})$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,-\frac{1}{a})$上单调递增，

$x\in(-\frac{1}{a},+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减；……………………3 分

综上，当$a\geq0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a<0$时，$f(x)$在$(0,-\frac{1}{a})$上单调递增，在$(-\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减.…………4 分

(2) 方程$f(x)=e^{-ax}+\frac{1}{2}ax^2$即$(1+2a)x+2\ln x=e^{-ax}$，即$x+2\ln x=-2ax+e^{-ax}$，

即$e^{\ln x}+2\ln x=e^{-ax}+2(-ax)$，

令$g(x)=e^x+2x$，则$g(\ln x)=g(-ax)$……………………………………5 分

因为$g'(x)=e^x+2>0$，所以$g(x)=e^x+2x$在 R 上单调递增，

所以$\ln x=-ax$，即$a=-\frac{\ln x}{x}$，所以$a=\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}$……………………………………6 分

因为x_1,x_2是方程$f(x)=e^{-ax}+\frac{1}{2}ax^2$的两个实根，所以$x_1,x_2$是方程$a=\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}$的两个实根，

即$a=\frac{1}{x_1}\cdot\ln\frac{1}{x_1},a=\frac{1}{x_2}\cdot\ln\frac{1}{x_2}$，所以$\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}$是方程$a=x\cdot\ln x$的两个实根.………7 分

令$h(x)=x\cdot\ln x$，则$h'(x)=\ln x+1$

当$x\in(0,\frac{1}{e})$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，当$x\in(\frac{1}{e},+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

$h(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e},h(1)=0$，当$x\to0$时，$f(x)\to0$ ……………………………………8 分

令$m=\frac{1}{x_1},n=\frac{1}{x_2}$，不妨设$m<n$，则$0<m<\frac{1}{e}<n<1$，

要证$2x_1\cdot x_2<e(x_1+x_2)$，即证$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{2}{e}$，即证$m+n>\frac{2}{e}$……………………………9 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开"微信 / 发现 / 搜一搜"搜索