第六届“刘徽杯”数学竞赛

第一天 (2023 年 11 月 18 日)

第 1 题 给定一个大于 2 的整数 n. 实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n(n-1).$$

求 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{2n+1}$ 的最大值.

第 2 题 是否存在三角形, 能将其划分成 7 个全等的锐角三角形? 请说明理由.

第 3 题 试求最小的正实数 a, 使得存在 (不依赖于 n 的) 实数 b, 满足以下条件: 对任意正整数 $n \geq 7$ 和任意 n 元集 $\mathcal{A}$, 无论如何选取 $\lfloor an^3 + bn^2 \rfloor$ 个 $\mathcal{A}$ 的不同三元子集, 都一定可以从集合 $\mathcal{A}$ 中选取七个不同元素分别置于图 1 的七个点上, 使得图中每条直线或圆上的三个点处于同一个被选取的三元子集中.

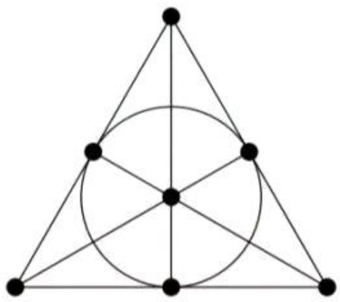

图 1

注: $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

第六届"刘徽杯"数学竞赛

第二天 (2023 年 11 月 19 日)

第 4 题 已知点 O 是三角形 ABC 的外心. 点 D 是线段 BC 的中点. 三角形 ABC 的九点圆与三角形 OBC 的外接圆相交于两点 E, F. 证明: 点 D 关于三角形 AEF 外接圆的幂等于 $|DO|^2$.

第 5 题 给定正整数 n, 求出所有正整数 x, y, z 使得 $x!+y!+z!=5^n n!$ 成立.

第 6 题 设 $G=(V,E)$ 为 n 阶简单无向连通图, 其中 n 是正整数. 给定顶点集 V 的划分 $V=S\cup T$, 使得 $|S|\geq 2$. 已知 T 中至少有两个不同的顶点与 S 中的顶点相邻, 并且 S 中每个顶点在 T 中都有一个邻居. 假定对于 T 中任意不相邻的两个顶点 x, y, 总存在一条顶点均在 T 中的路径连接 x 和 y, 且 $d(x)+d(y)\geq n+1$. 证明: 可以从图 G 出发通过删去 E 中的若干条边得到一棵树, 使得 S 中的每个顶点在这棵树中的度数都是 1.