

第六届“刘徽杯”数学竞赛

第一天 (2023 年 11 月 18 日)

第 1 题 给定一个大于 2 的整数 n . 实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 = n(n-1).$$

求 $\sum_{i=1}^n a_i^{2n+1}$ 的最大值.

第 2 题 是否存在三角形, 能将其划分成 7 个全等的锐角三角形? 请说明理由.

第 3 题 试求最小的正实数 a , 使得存在 (不依赖于 n 的) 实数 b , 满足以下条件: 对任意正整数 $n \geq 7$ 和任意 n 元集 \mathcal{A} , 无论如何选取 $\lfloor an^3 + bn^2 \rfloor$ 个 \mathcal{A} 的不同三元子集, 都一定可以从集合 \mathcal{A} 中选取七个不同元素分别置于图 1 的七个点上, 使得图中每条直线或圆上的三个点处于同一个被选取的三元子集中.

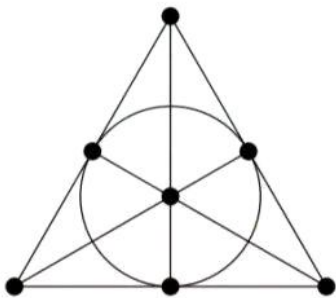


图 1

注: $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.



第六届“刘徽杯”数学竞赛

第二天 (2023 年 11 月 19 日)

第 4 题 已知点 O 是三角形 ABC 的外心. 点 D 是线段 BC 的中点. 三角形 ABC 的九点圆与三角形 OBC 的外接圆相交于两点 E, F . 证明: 点 D 关于三角形 AEF 外接圆的幂等于 $|DO|^2$.

第 5 题 给定正整数 n , 求出所有正整数 x, y, z 使得 $x! + y! + z! = 5^n n!$ 成立.

第 6 题 设 $G = (V, E)$ 为 n 阶简单无向连通图, 其中 n 是正整数. 给定顶点集 V 的划分 $V = S \cup T$, 使得 $|S| \geq 2$. 已知 T 中至少有两个不同的顶点与 S 中的顶点相邻, 并且 S 中每个顶点在 T 中都有一个邻居. 假定对于 T 中任意不相邻的两个顶点 x, y , 总存在一条顶点均在 T 中的路径连接 x 和 y , 且 $d(x) + d(y) \geq n + 1$. 证明: 可以从图 G 出发通过删去 E 中的若干条边得到一棵树, 使得 S 中的每个顶点在这棵树中的度数都是 1.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 ([网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

