高 2024 届期中考试数学试卷参考答案

单选：1—4：ADAB　　5—8：BCCB

多选：9. ACD　　10. AB　　11. ACD　　12. BD

详解：

1. 由 $A=\{x\mid |x-2|<1\}$ 得 $A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x\mid \log_2 x<1\}=\{x|0<x<2\}$，

所以 $A\cup B=\{x|0<x<3\}$，

2. 设 $z=a+b\mathrm{i},a,b\in\mathrm{R}$，依题意 $\frac{3}{a+b\mathrm{i}}+a+b\mathrm{i}+2=0$，

$\frac{3(a-b\mathrm{i})}{(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})}+a+b\mathrm{i}+2=0$，$\frac{3a}{a^2+b^2}+a+2+\left(b-\frac{3b}{a^2+b^2}\right)\mathrm{i}=0$，

所以 $\begin{cases}\frac{3a}{a^2+b^2}+a+2=0\\ b-\frac{3b}{a^2+b^2}=0\end{cases}$，解得 $a=-1,b^2=2$，

则 $\left|\frac{3}{z}\right|=\frac{3}{|z|}=\frac{3}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

3. 由 $2\sin\alpha=3+2\sqrt{3}\cos\alpha$，得 $\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{3}{4}$，即 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{3}{4}$，

所以 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\sin[2(\alpha-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{2}]=\cos 2(\alpha-\frac{\pi}{3})=1-2\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{3})=1-2\times(\frac{3}{4})^2=-\frac{1}{8}$.

4. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由于 $a_1,2a_2,4a_3$ 成等差数列，

所以 $4a_2=a_1+4a_3,4a_1q=a_1+4a_1q^2$，由于 $a_1=2$，

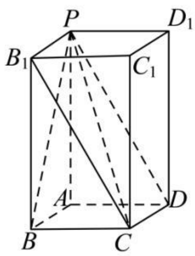
所以 $4q^2-4q+1=(2q-1)^2=0,q=\frac{1}{2}$，

所以 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{2-n}$，

所以 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=4-2^{2-n}$，$S_{n+1}=4-2^{1-n}$，

所以 $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+2$.

5. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，则此四棱锥可补形成长方体 $PB_1C_1D_1-ABCD$，如图，



显然直线 PB_1 是平面 ABP 与平面 CDP 的交线，由 $PB_1\perp$ 平面 APD_1D，得 $PB_1\perp PA, PB_1\perp PD$，

因此 $\angle APD$ 是平面 ABP 与平面 CDP 所成二面角的平面角，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAD$ 中，$PA=2AD$，则 $PD=\sqrt{5}AD$，$\cos\angle APD=\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以平面 ABP 与平面 CDP 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

6. 所有对局中，恰有一组对局是不公平对局的情况为：2 名外挂玩家都分到了同一组对局，

记该事件为事件 A，则 $P(A)=\dfrac{C_5^1\cdot C_{48}^8\cdot C_{40}^{10}\cdot C_{30}^{10}\cdot C_{20}^{10}\cdot C_{10}^{10}}{C_{50}^{10}\cdot C_{40}^{10}\cdot C_{30}^{10}\cdot C_{20}^{10}\cdot C_{10}^{10}}=\dfrac{C_5^1\cdot C_{48}^8}{C_{50}^{10}}=\dfrac{9}{49}$.

7. 设点 $P\left(a,\dfrac{a}{4}\right),Q\left(x,\dfrac{e^x}{4}\right)$，则 $f(x)=\left(\dfrac{e^x}{4}-\dfrac{a}{4}\right)+(x-a)^2=|PQ|^2$，

令 $g(x)=\dfrac{1}{4}x$，$h(x)=\dfrac{e^x}{4}$，

可知 $f(x)$ 的最小值即为 $g(x)$ 上的点 P 与 $h(x)$ 上的点 Q 之间的距离平方的最小值，

若直线 $y=\dfrac{1}{4}x+m$ 与函数 $h(x)$ 的图象相切，设切点的横坐标为 n，

因为 $h'(x)=\dfrac{e^x}{4}$，可得 $\dfrac{e^n}{4}=\dfrac{1}{4}$，解得：$n=0$，

则切点为 $M\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$，且切点在 $y=\dfrac{1}{4}x+m$ 上，故 $m=\dfrac{1}{4}$，

点 M 到直线 $g(x)$ 的距离为 $d=\dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$，所以 $f(x)\geq d^2=\dfrac{1}{17}$，

又因为 $f(x)\leq\dfrac{1}{17}$ 有解，则 $f(x)=\dfrac{1}{17}$，

此时点 P 在 $g(x)=\dfrac{1}{4}x$ 上，也在直线 $g(x)=\dfrac{1}{4}x$ 在点 P 处的垂线即直线 MP 上，

其中直线 $g(x)=\dfrac{1}{4}x$ 在点 P 处的垂线的斜率为 -4，

所以直线 $g(x)=\dfrac{1}{4}x$ 在点 P 处的垂线方程为：$y=-4x+\dfrac{1}{4}$

即点 P 坐标满足 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{4}x \\ y=-4x+\dfrac{1}{4} \end{cases}$，解得 $x=\dfrac{1}{17}$，即 $a=\dfrac{1}{17}$.

8. 令 $a=\dfrac{97}{100}<\dfrac{49}{50}=1-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{5})^2$，

设 $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-1$ 且 $0<x<1$，则 $f'(x)=x-\sin x$，

令 $f'(x)=g(x)$，则 $g'(x)=1-\cos x>0$，所以 $f'(x)=g(x)$ 单调递增，

则 $f'(x)>f'(0)=0$，故 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)>f(0)=\cos 0+\dfrac{1}{2}\times 0-1=0$，

故 $\cos x>1-\dfrac{1}{2}x^2$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，则 $\cos\dfrac{1}{5}>1-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{5})^2=\dfrac{98}{100}>\dfrac{97}{100}$，即 $b>a$，

由三角函数线，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时有 $\tan x>x$，则 $\tan\dfrac{1}{5}=\dfrac{\sin\dfrac{1}{5}}{\cos\dfrac{1}{5}}>\dfrac{1}{5}\Rightarrow\cos\dfrac{1}{5}<5\sin\dfrac{1}{5}<\dfrac{51}{10}\sin\dfrac{1}{5}$，即 $c>b$.

综上，$c>b>a$.

9. 对于 A，设 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{a^2+b^2},|z|^2=a^2+b^2$，

而 $z\bar{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2$，所以 $|z|^2=z\bar{z}$ 成立，故 A 正确；

对于 B，设 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$，

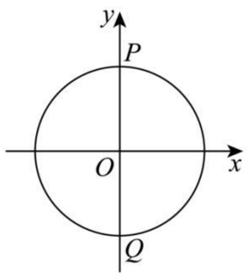
当 a,b 均不为 0 时，$z^2=(a+b\mathrm{i})^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$ 为虚数，

而 $|z|^2=a^2+b^2$ 为实数，所以 $z^2=|z|^2$ 不成立，故 B 错误；

对于 C，$|z|=1$，则复数 z 对应的点 P 的轨迹是以 $O(0,0)$ 为圆心，1 为半径的圆，

$|z+\mathrm{i}|=|z-(-\mathrm{i})|$ 的几何意义为复数 z 对应的点 P 与 $Q(0,-1)$ 两点间的距离 $|PQ|$，

所以，如图可知，当点 P 为 $(0,1)$ 时，$|PQ|$ 最大，$|z+\mathrm{i}|$ 取最大值，最大值为 2，故 C 正确；



对于 D，设 $z=a+b\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbf{R})$，$z_1=x+y\mathrm{i}$ $(x,y\in\mathbf{R})$，

由 $\overline{z_1}=z_2$，则 $z_2=\overline{z_1}=x-y\mathrm{i}$，

则$|zz_1|=|(a+bi)(x+yi)|=|(ax-by)+(bx+ay)i|=\sqrt{(ax-by)^2+(bx+ay)^2}$

$=\sqrt{(ax)^2+(by)^2+(bx)^2+(ay)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$；

$|zz_2|=|(a+bi)(x-yi)|=|(ax+by)+(bx-ay)i|=\sqrt{(ax+by)^2+(bx-ay)^2}$

$=\sqrt{(ax)^2+(by)^2+(bx)^2+(ay)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$；

所以$|zz_1|=|zz_2|$，故 D 正确.

10. 对于 A：因为$A>B$，所以$a>b$，所以$\sin A>\sin B$，A 正确；

对于 B：因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以$A+B>\frac{\pi}{2}$，即$B>\frac{\pi}{2}-A$，

因为$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$且$\frac{\pi}{2}-A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)=\sin x$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，

所以$\sin B>\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos A$，B 正确；

对于 C：$a^2\tan B=b^2\tan A\Rightarrow\sin^2A\frac{\sin B}{\cos B}=\sin^2B\frac{\sin A}{\cos A}$，

即$\sin A\cos A=\sin B\cos B$，即$\frac{1}{2}\sin 2A=\frac{1}{2}\sin 2B$，

所以$\sin 2A=\sin 2B$，而A,B为三角形内角，

所以$2A=2B\Rightarrow A=B$或者$2A+2B=\pi\Rightarrow A+B=\frac{\pi}{2}$，

所以$\triangle ABC$是等腰三角形或者直角三角形，C 错误；

对于 D：易求出$\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，而$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，所以$\frac{13}{14}=\frac{a^2+25-9}{2\times a\times 5}$，

化简可得$7a^2-65a+112=0$，解得$a=\frac{16}{7}$或者$a=7$，

当$a=\frac{16}{7}$时此时$\angle B$是最大角且$\cos B<0$，所以满足钝角三角形，

此时$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{16}{7}\times 5\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{60\sqrt{3}}{49}$，

当$a=7$时此时$\angle A$为最大角且$\cos A<0$，所以满足钝角三角形，

此时$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 7\times 5\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，所以 D 错误，

11. 设$AB=2AD=2PD=2$，

对于 A 选项，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理可得$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\frac{\pi}{3}=4+1-2\times 2\times 1\times\frac{1}{2}=3$，

所以，$AD^2+BD^2=AB^2$，所以，$AD\perp BD$，

因为$PD\perp$底面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，则$BD\perp PD$，

因为$AD\cap PD=D$，AD、$PD\subset$平面PAD，所以，$BD\perp$平面PAD，

因为$PA\subset$平面PAD，所以，$PA\perp BD$，A 对；

对于 B 选项，因为$PD\perp$底面$ABCD$，所以，PB与平面$ABCD$所成的角为$\angle PBD$，

且$\tan\angle PBD=\frac{PD}{BD}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又因为$\angle PBD$为锐角，故$PBD=\frac{\pi}{6}$，

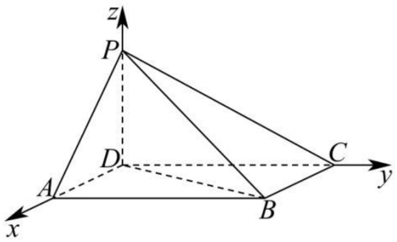
即PB与平面$ABCD$所成角为$\frac{\pi}{6}$，B 错；

对于 C 选项，因为四边形$ABCD$为平行四边形，则$CD//AB$，且$CD=AB=2$，
所以，异面直线AB与PC所成角为$\angle PCD$或其补角，
因为$PD\perp$底面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，则$PD\perp CD$，

所以，$PC=\sqrt{PD^2+CD^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，则$\cos\angle PCD=\frac{CD}{PC}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

故异面直线AB与PC所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，C 对；

对于 D 选项，因为$PD\perp$底面$ABCD$，$AD\perp BD$，
以点D为坐标原点，DA、DB、DP所在直线分别为x、y、z轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则$A(1,0,0)$、$B\left(0,\sqrt{3},0\right)$、$C\left(-1,\sqrt{3},0\right)$、$P(0,0,1)$，

设平面PAB的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{AB}=\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,0,1)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=-x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=-x_1+z_1=0\end{cases}$，取$x_1=\sqrt{3}$，则$\vec{m}=\left(\sqrt{3},1,\sqrt{3}\right)$，

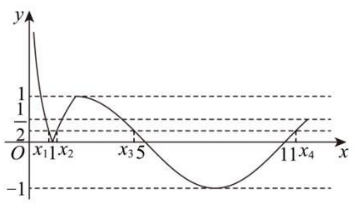
设平面PBC的法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{BP}=\left(0,-\sqrt{3},1\right)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-x_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{3}y_2+z_2=0\end{cases}$，取$y_2=1$，可得$\vec{n}=\left(0,1,\sqrt{3}\right)$，

所以，$\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{4}{\sqrt{7}\times 2}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

所以，平面PAB与平面PBC夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$，D 对.

12. 作出$f(x)$在$\left(0,12\right]$上的图象，如图所示：



对于A，因为$f(\frac{\sqrt{2}}{2})=f(\sqrt{2})=f(4)=f(12)=\frac{1}{2}$，

又因为方程$f(x)=a$有四个互不相等的实数根，所以$0<a\le\frac{1}{2}$，故A错误；

对于B，由题意可得$-\log_2 x_1=\log_2 x_2$，$\log_2 x_1=-\log_2 x_2=\log_2\frac{1}{x_2}$，且有$\frac{\sqrt{2}}{2}\le x_1<1$，$1<x_2\le\sqrt{2}$，所以$x_1=\frac{1}{x_2}$，

故$2x_1+x_2=\frac{2}{x_2}+x_2\ge 2\sqrt{x_2\cdot\frac{2}{x_2}}=2\sqrt{2}$，当$\frac{2}{x_2}=x_2$，即$x_2=\sqrt{2}$时，等号成立，故B正确；

对于C，由题意可得$f\left(\frac{7}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{7}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}$，由A可知$0<a\le\frac{1}{2}$，

所以$f\left(\frac{7}{2}\right)>a$，故C错误；

对于D，由题意可知x_3与x_4关于直线$x=8$对称，且$4\le x_3<5$，$11<x_4\le 12$，所以$x_3+x_4=16$，故$\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}=\frac{16}{x_3x_4}$.

因为$x_3+x_4=16$，所以$x_3=16-x_4$.

又因为$11<x_4\le 12$，

所以$x_3\cdot x_4=(16-x_4)x_4=-x_4^2+16x_4=64-(x_4-8)^2$，在$(11,12]$上单调递减，

故$48\le 64-(x_4-8)^2<55$，

所以$\frac{1}{55}<\frac{1}{x_3x_4}\le\frac{1}{48}$，$\frac{16}{55}<\frac{16}{x_3x_4}\le\frac{1}{3}$，所以$\frac{16}{55}<\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\le\frac{1}{3}$.

因为$x_1x_2=1$，$x_2\in\left(1,\sqrt{2}\right]$，所以$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=x_1+x_2=\frac{1}{x_2}+x_2$，

在$\left(1,\sqrt{2}\right]$单调递增，所以$\frac{1}{x_2}+x_2\in\left(2,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$，故$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\in\left(2,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$，

所以$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$的取值范围为$\left(\frac{126}{55},\frac{2+9\sqrt{2}}{6}\right]$，故D正确.

13. $\frac{\sqrt{6}+3}{6}$　　14. 7　　15. $\frac{11}{24}$　　16. $(-\infty,2]$

13. 因为α为锐角，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\alpha+\frac{\pi}{3}$为第二象限角，又$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以$\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}+3}{6}$.

14. 若公差为d且$d\neq 0$，则$a_6=2a_3\Rightarrow a_1+5d=2a_1+4d\Rightarrow a_1=d$，

由$\frac{S_6}{S_2}=\frac{6a_1+15d}{2a_1+d}=\frac{21d}{3d}=7$.

15. 由已知可得，一次投球中，三人中恰有两人投篮命中的概率$P_1=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$；

一次投球中，三人投篮均命中的概率$P_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

所以，在一次投球中，三人中至少有两人投篮命中的概率$P=P_1+P_2=\frac{3}{8}+\frac{1}{12}=\frac{11}{24}$.

16. 根据题意可知，$x>0$，

由$e^{3x}-a-1\geq\frac{1+\ln x}{x}$，可得$a\leq e^{3x}-\frac{\ln x+1}{x}-1\ (x>0)$恒成立，

令$f(x)=e^{3x}-\frac{\ln x+1}{x}-1\ (x>0)$，则$a\leq f(x)_{\min}$，

现证明$e^x\geq x+1$恒成立，设$g(x)=e^x-x-1$，

$g'(x)=e^x-1$，当$g'(x)=0$时，解得$x=0$，

当$x<0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

当$x>0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递增，

故$x=0$时，函数$g(x)$取得极小值即最小值，$g(0)=0$，

所以$g(x)\geq g(0)=0$，即$e^x-x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq x+1$恒成立，

$f(x)=e^{3x}-\frac{\ln x+1}{x}-1=\frac{x\cdot e^{3x}-\ln x-1}{x}-1$，

$=\frac{e^{\ln x+3x}-\ln x-1}{x}-1\geq\frac{\ln x+3x+1-\ln x-1}{x}-1=2$，

当且仅当$\ln x+3x=0$（该方程显然有解）时取等号，所以$f(x)_{\min}=2$，即$a\leq 2$.

所以实数a的取值范围是$(-\infty,2]$.

17. （1）当$m=1$时，$A=\{x|0\leq x\leq 5\}$；$\complement_R A=\{x\,|\,x<0或x>5\}$，

解$|x|\leq 2$得$-2\leq x\leq 2$，故$B=\{x\,|-2\leq x\leq 2\}$，

故$A\cup B=\{x\,|-2\leq x\leq 5\},(\complement_R A)\cap B=\{x\,|-2\leq x<0\}$；

（2）由$A\cap B=A$得$A\subseteq B$，

当 $A=\varnothing$ 时，$m-1>2m+3,\therefore m<-4$；
当 $A\neq\varnothing$ 时，$A\subseteq B$，

故 $\begin{cases} m-1\le 2m+3 \\ -2\le m-1 \\ 2m+3\le 2 \end{cases}$，解得 $-1\le m\le -\dfrac{1}{2}$，

即实数 m 的取值范围为 $m<-4$ 或 $-1\le m\le -\dfrac{1}{2}$.

18. （1）因为 $a_n\neq 0$，所以 S_n 不为常数，

由 $\dfrac{n^2+n+1}{S_n}=\dfrac{n^2+n+4-S_n}{3}$，得 $S_n^2-\left(n^2+n+4\right)S_n+3\left(n^2+n+1\right)=0$，

即 $(S_n-3)\left[S_n-\left(n^2+n+1\right)\right]=0$，解得 $S_n=n^2+n+1$ 或 $S_n=3$（舍去），

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3$，

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n+1-(n-1)^2-(n-1)-1=2n$，

所以，$a_n=\begin{cases} 3, n=1, \\ 2n, n\ge 2 \end{cases}$.

（2）当 $n=1$ 时，$T_1=(a_1-1)\cdot 2^{a_1}=(3-1)\cdot 2^3=16$，

当 $n\ge 2$ 时，$T_n=(a_1-1)\cdot 2^{a_1}+(a_2-1)\cdot 2^{a_2}+(a_3-1)\cdot 2^{a_3}+(a_4-1)\cdot 2^{a_4}+\cdots+(a_n-1)\cdot 2^{a_n}$

$=2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+5\cdot 2^6+7\cdot 2^8+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{2n}$

$=16+3\cdot 4^2+5\cdot 4^3+7\cdot 4^4+\cdots+(2n-1)\cdot 4^n$

$=12+1\cdot 4^1+3\cdot 4^2+5\cdot 4^3+\cdots+(2n-1)\cdot 4^n$

令 $R_n=1\cdot 4^1+3\cdot 4^2+5\cdot 4^3+\cdots+(2n-1)\cdot 4^n$，①

则 $4R_n=1\cdot 4^2+3\cdot 4^3+5\cdot 4^4+\cdots+(2n-3)\cdot 4^n+(2n-1)\cdot 4^{n+1}$，②

①-②：$-3R_n=4+2\cdot 4^2+2\cdot 4^3+\cdots+2\cdot 4^n-(2n-1)\cdot 4^{n+1}$

$=4+\dfrac{32\left(1-4^{n-1}\right)}{1-4}-(2n-1)\cdot 4^{n+1}$

$=4-\dfrac{32}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot 4^{n+1}-(2n-1)\cdot 4^{n+1}$

$=-\dfrac{20}{3}+\left(\dfrac{5}{3}-2n\right)\cdot 4^{n+1}$.

所以$R_n=\frac{20}{9}+\left(\frac{2n}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot 4^{n+1}$，

所以$T_n=12+\frac{20}{9}+\left(\frac{2n}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot 4^{n+1}=\frac{128}{9}+\frac{(6n-5)}{9}\cdot 4^{n+1}, n\in\mathbf{N}^*$.

经检验，当$n=1$时，$T_1=16$满足上式，

所以$T_n=\frac{128}{9}+\frac{(6n-5)}{9}\cdot 4^{n+1}$.

19. （1）由题意得$A=2,\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore$最小正周期$T=\pi$，则$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

若选①，$f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$为奇函数，则$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$，

$\therefore 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$，即$\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$

$\because 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，即$-\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{3}+\varphi<\frac{\pi}{6}$，

$\therefore -\frac{\pi}{3}+\varphi=0$即$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

若选②，当$x=0$时$f(x)=\sqrt{3}$，

$\therefore 2\sin\varphi=\sqrt{3}$即$\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

若选③，$x=\frac{\pi}{12}$是函数$f(x)$的一条对称轴，

$\therefore 2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(x\in Z)$即$\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(x\in Z)$

$\because 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

（2）$\because f(A)=\sqrt{3}$，

$\therefore 2\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$,即$\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because A\in(0,\pi)$ 即$\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$,

$\therefore 2A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，即$A=\frac{\pi}{6}$，

又$\because c=3$，$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{3}$得$b=4\sqrt{3}$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

解得$a=\sqrt{21}$.

20. （1）证明：如图所示，取BB_1中点F，连接DF，EF，

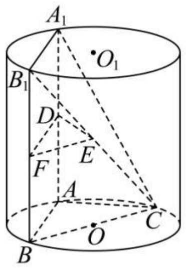
因为D，E，F分别为AA_1，B_1C，BB_1的中点，所以$DF//AB$，$EF//BC$，

又因为$DF\not\subset$平面ABC，$EF\not\subset$平面ABC，$AB\subset$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，

所以$DF//$平面ABC，$EF//$平面ABC，

又因为$DF\cap EF=F$，$DE,EF\subset$平面DEF，

所以平面$DEF//$平面ABC，又因为$DE\subset$平面DEF，所以$DE//$平面ABC.



（2）解：如图所示，连接EO,AO，

因为E,O分别为B_1C,BC的中点，所以$EO//BB_1$，且$EO=\frac{1}{2}BB_1$，

又因为D为AA_1的中点，所以$DA//BB_1$，且$DA=\frac{1}{2}BB_1$，

所以$EO=DA$，且$EO//DA$，即四边形$AOED$为平行四边形，即$DE//AO$，

因为$DE\perp$面CBB_1，所以$AO\perp$面CBB_1.

又因为$BC\subset$面CBB_1，所以$AO\perp BC$，可得$AB=AC$，

以A为原点，以AB,AC,AA_1分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系，如图所示，

设$BB_1=BC=2$，则$AB=AC=\sqrt{2}$，

可得$B_1\left(\sqrt{2},0,2\right)$，$C\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$A_1(0,0,2)$，$B\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$D(0,0,1)$，

则 $\overrightarrow{A_1B_1}=\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$\overrightarrow{A_1C}=\left(0,\sqrt{2},-2\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$，$\overrightarrow{BB_1}=\left(0,0,2\right)$，

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=\sqrt{2}x=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=\sqrt{2}y-2z=0\end{cases}$，

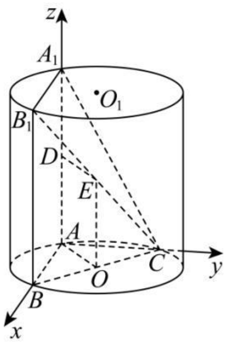
取 $y=\sqrt{2}$，可得 $z=0,z=1$，所以 $\vec{n}=\left(0,\sqrt{2},1\right)$.

设平面 BB_1C 的法向量为 $\vec{m}=\left(a,b,c\right)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=2c=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-\sqrt{2}a+\sqrt{2}b=0\end{cases}$，

取 $a=1$，可得 $b=1,c=0$，所以 $\vec{m}=\left(1,1,\sqrt{2}\right)$，

则 $\cos\left\langle\vec{n},\vec{m}\right\rangle=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+1+2}\cdot\sqrt{2+1}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以平面 A_1B_1C 与平面 BB_1C 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



21. （1）由散点图可以判断，$y=ce^{dx}$ 更适宜作为平均产卵数 y 关于平均温度 x 的回归方程类型.

（2）将 $y=ce^{dx}$ 两边同时取自然对数，可得 $\ln y=\ln c+dx$，

由题中的数据可得，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iz_i-7\overline{x}\overline{z}=33.6$，$\sum\limits_{i=1}^{7}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-7\overline{x}^2=112$，

所以 $d=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iz_i-7\overline{x}\overline{z}}{\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-7\overline{x}^2}=\dfrac{33.6}{112}=0.3$，

则 $\ln c=\overline{z}-d\overline{x}=3.6-0.3\times27=-4.5$，

所以 z 关于 x 的线性回归方程为 $z=0.3x-4.5$，

故 y 关于 x 的回归方程为 $y=e^{0.3x-4.5}$；

（3）用 X_1，X_2 和 X_3 分别表示选择三种方案的收益.

采用第 1 种方案，无论气温如何，产值不受影响，收益为 $200-18=182$ 万，即 $X_1=182$

采用第 2 种方案，不发生 28℃以上的红蜘蛛虫害，收益为 $200-10=190$ 万，

如果发生，则收益为$100-10=90$万，即$X_2=\begin{cases}190,\text{不发生}28℃\text{以上的红蜘蛛虫害}\\90,\text{发生}28℃\text{以上的红蜘蛛虫害}\end{cases}$，

同样，采用第 3 种方案，有$X_3=\begin{cases}200,\text{不发生虫害}\\160,\text{只发生}22\text{-}28℃\text{虫害}\\100,\text{发生}28℃\text{以上虫害}\end{cases}$

所以，$E(X_1)=182$，

$E(X_2)=190\times P(X_2=190)+90\times P(X_2=90)=190\times 0.9+90\times 0.1=171+9=180$，

$E(X_3)=200\times P(X_3=200)+160\times P(X_3=160)+100\times P(X_3=100)$

$\quad=200\times 0.6+160\times 0.3+100\times 0.1=178$.

显然，$E(X_1)$最大，所以选择方案 1 最佳.

22. （1）设函数$\varphi(x)=f(x)-x=\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{2}-x$，

则$\varphi'(x)=\dfrac{1}{1+x}+x-1=\dfrac{x^2}{1+x}$，

当$x\in[0,+\infty)$时，$\varphi'(x)\ge 0$，

则$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

所以$\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$，从而$f(x)-x\ge 0$，即$f(x)\ge x$；

（2）设函数$h(x)=f(x)+1-g(x)=\ln(1+x)+1-\cos x$，

当$x>0$时，$1-\cos x\ge 0$，$\ln(1+x)>0$，则$h(x)>0$恒成立，

则由$h\left(e^{\frac{a}{2}}\right)>0$，得$f\left(e^{\frac{a}{2}}\right)+1>g\left(e^{\frac{a}{2}}\right)$，$f(b^2)+1>g(b^2)$

又$f\left(e^{\frac{a}{2}}\right)+1=g(b)$，所以$g(b)>g\left(e^{\frac{a}{2}}\right)$,

因为$g(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}$，所以$g'(x)=x-\sin x$，

令$u(x)=x-\sin x$，则$u'(x)=1-\cos x\ge 0$恒成立,

所以$u(x)=g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$g'(x)>g'(0)=0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$b>0$，$e^{\frac{a}{2}}>0$，所以$b>e^{\frac{a}{2}}$,

要证 $f\left(b^2\right)+1>g(a+1)$，只需证 $g\left(b^2\right)>g(a+1)$，

即证 $b^2>a+1$.

因为 $b>\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$，所以 $b^2>\mathrm{e}^a$.

设函数 $m(x)=\mathrm{e}^x-x-1(x>0)$，则 $m'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $a>0$，所以 $m(a)>m(0)=0$，所以 $\mathrm{e}^a>a+1$，

所以 $b^2>a+1$，

所以 $g\left(b^2\right)>g(a+1)$，从而 $f\left(b^2\right)+1>g(a+1)$ 得证.