

绝密★启用前

海南省 2023—2024 学年高三学业水平诊断(一)

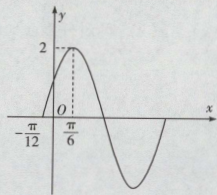
数 学

考生注意:

- 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

- 设集合 $A = \{x | x^2 < 1\}$, $B = \{x | \log_2 x \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(0, 1)$ B. $(-1, 2]$ C. $(-1, 0)$ D. $(0, 2]$
- 若 $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2 - 3 \leq a$, 则实数 a 的取值范围是
A. $(-\infty, -3]$ B. $[-3, +\infty)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $[0, +\infty)$
- 函数 $f(x) = 2^{x-1} + x - 3$ 的零点所在的区间是
A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 3)$
- 比尔-朗伯定律是一条有关光吸收的物理定律,常用来描述光在透明介质中传播时的衰减规律,其数学表达式可写为 $-\frac{1}{k} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$, 其中 I_0 和 I 表示光在穿过介质前、后的强度(单位:lx), x 是光在介质中传播的距离(单位:m), 其中 k 是取决于介质特性的常数. 若某处湖面的阳光强度为 $I_0 = 6\,600$ lx, 对于此湖中的水取 $k = 0.025$, 则此湖中 20 m 深处的阳光强度约为(参考数据: $\sqrt{e} \approx 1.65$)
A. 1 500 lx B. 2 000 lx C. 3 000 lx D. 4 000 lx
- 已知函数 $f(x) = 2\cos(2\omega x - \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $\sin(\omega\varphi)$ 的所有可能取值的集合为



- A. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ B. $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ C. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ D. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

6. 若 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\tan \alpha =$

- A. $\frac{4+\sqrt{7}}{5}$ B. $\frac{4-\sqrt{7}}{5}$ C. $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ D. $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

7. 已知 $a = \lg 3, b = \sin 1, c = 0.5^{0.8}$, 则

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $a < c < b$ D. $b < a < c$

8. 已知函数 $f(x) = (x+1)e^x$, 过点 $P(m, 0)$ 作曲线 $y = f(x)$ 的两条切线, 切点分别为 $A(a, f(a))$ 和 $B(b, f(b))$, 若 $a + b = 0$, 则实数 $m =$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知 $a > 0, b > 0$, 若 $a + 2b = 1$, 则

- A. $a + b > \frac{1}{2}$ B. $a + b < 1$
C. $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 8 D. ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$

10. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称
C. $f(x)$ 的零点是 $\left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})\right\}$
D. $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$

11. 古希腊的数学家海伦在他的著作《测地术》中最早记录了“海伦公式”: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 其中 $p = \frac{a+b+c}{2}$, a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边, 该公式具有轮换对称的特点. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 3$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $12\sqrt{3}$, 则

- A. 角 A, B, C 构成等差数列 B. $\triangle ABC$ 的周长为 36
C. $\triangle ABC$ 的内切圆面积为 $\frac{8\pi}{3}$ D. BC 边上的中线长度为 $\sqrt{26}$
12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x+2)$ 为奇函数, $f(2x+1)$ 为偶函数, 则
- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 1)$ 对称 B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称
C. $f(1) + f(7) = 0$ D. $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2\,024) = 0$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = x^\alpha (\alpha \in \mathbf{Z})$, 写出一个同时满足下列性质①②的 α 的值: _____.

①当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) < 0$; ② $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

座位号

考场号

考生号

姓名

班级

县(市、区)

线

订

装

14. 已知 $\cos x = \frac{3}{5}$, 则 $\frac{\sin x \sin 2x}{1 - \cos 2x} =$ _____.

15. 设 $0 < a < 1$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$, 若函数 $f(x) = \log_a x + \log_{2a} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2(x-1)|, & x > 1, \\ (x+1)^2, & x \leq 1, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有 4 个不相等的实数根 x_1, x_2, x_3, x_4 , 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 的取值范围是 _____.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -1$, S_n 是 $|a_n|$ 的前 n 项和, 且数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = n \cdot 3^{a_n+2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

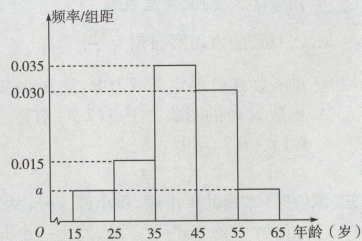
18. (12 分)

国务院于 2023 年开展第五次全国经济普查, 为更好地推动第五次全国经济普查工作, 某地充分利用信息网络开展普查宣传, 向基层普查人员、广大普查对象及社会公众宣传经济普查知识. 为了解宣传进展情况, 现从参与调查的人群中随机选出 200 人, 并将这 200 人按年龄(单位: 岁)分组: 第 1 组 $[15, 25)$, 第 2 组 $[25, 35)$, 第 3 组 $[35, 45)$, 第 4 组 $[45, 55)$, 第 5 组 $[55, 65]$, 得到的频率分布直方图如图所示.

(I) 求图中 a 的值;

(II) 求这 200 人年龄的平均数(同一组数据用该组所在区间的中点值作代表)和中位数(精确到 0.1);

(III) 现要从年龄在 $[25, 35)$ 与 $[55, 65]$ 的两组中按照人数比例用分层随机抽样的方法抽取 5 人, 再从这 5 人中任选 3 人进行问卷调查, 求从 $[25, 35)$ 中至少抽到 2 人进行问卷调查的概率.



19. (12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $(\sin B + \sin C)(b - c) = (a - \sqrt{2}c) \cdot \sin A$.

(I) 求 B 的值;

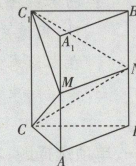
(II) 若 $b = \sqrt{2}$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 1, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

20. (12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, M, N 分别为棱 AA_1, BB_1 的中点, $AC \perp AB, AB = 4, AC = 3, AA_1 = 6$.

(I) 求证: $CM \perp$ 平面 C_1MN ;

(II) 求二面角 $C - C_1N - M$ 的正弦值.



21. (12 分)

已知抛物线 $E: x^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的渐近线的距离是 $\frac{1}{2}$.

(I) 求 p 的值;

(II) 已知过点 F 的直线与 E 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中垂线与 E 的准线 l 交于点 P , 且 $|PM| = \lambda |AB|$, 求实数 λ 的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x^2 - 2ax + a^2)e^{1-x}, g(x) = 2\ln(x-1) - x + 1$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $a = 1$, 函数 $h(x) = mf(x) - g(x)$, 且对任意 $x > 1, h(x) > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.