

青岛一中 2023-2024 学年度第一学期第一次模块考试

高三数学

2023.11

本卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分

满分 150 分, 考试时间 120 分钟

注意事项: (请考生答题前先看清试卷和答题卡上的注意事项或说明。)

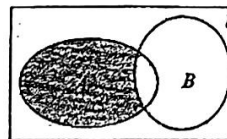
试题答案全部答到答题卡上, 在草稿纸、试题卷上答题无效, 考试结束时只交答题卡。

第 I 卷 (总分 60 分)

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | x(x-4) < 0\}$, $B = \{x | \log_2(x-1) > 1\}$, 图中阴影部分所表示的集合为 ()

A. $\{x | 0 < x < 3\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 3\}$ D. $\{x | 0 \leq x < 4\}$



2. 设 $z(i-i^6)=1$, 则 $\bar{z}-z = ()$

A. i B. -i C. 1 D. -1

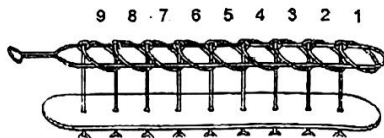
3. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是平面向量, 下列命题中真命题的个数是: ()

① $(\vec{a}-\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b}-\vec{c})$ ② $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ③ $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$ ④ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

4. 九连环是一种流传于我国民间的传统智力玩具, 它用九个圆环相连成串, 以解开为胜。它在中国有近两千年的历史, 《红楼梦》中有林黛玉巧解九连环的记载。周邦彦也留下关于九连环的名句“纵妙手、能解连环。”九连环有多种玩法, 在某种玩法中: 已知解下 1 个圆环最少需要移动圆环 1 次, 解下 2 个圆环最少需要移动圆环 2 次, 记 $a_n (3 \leq n \leq 9, n \in \mathbb{N}^+)$ 为解下 n 个圆环需要移动圆环的最少次数, 且 $a_n = a_{n-2} + 2^{n-1}$,

则解下 8 个圆环所需要移动圆环的最少次数为 ()



A. 30 B. 90 C. 170 D. 341

5. 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x + 1$, 则下列选项正确的是 ()

A. 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 B. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ 单调递增

C. $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ 单调递减 D. $f(x)$ 的一个对称轴为 $x = \frac{\pi}{12}$

6. α, β 为两个不同的平面, m, n 为两条不同的直线, 下列说法中正确的个数是 ()

①若 $\alpha // \beta, m \subset \alpha$, 则 $m // \beta$ ②若 $m // \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m // n$
③若 $m \perp \alpha, m // n$, 则 $n \perp \alpha$ ④若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = n, m \perp n$, 则 $m \perp \beta$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

已知函数 $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + \sin 2x$ 在 $(0, a)$ 上有 4 个零点, 则实数 a 的最大值为 ()

- A. $\frac{8}{3}\pi$ B. $\frac{4}{3}\pi$ C. $\frac{10}{3}\pi$ D. 3π

8. 对于数列 $\{a_n\}$, 若任意 $m, n \in N^* (m > n)$, 都有 $a_m - a_n \geq t(m - n)$ (t 为常数) 成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质

$P(t)$, 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^n$, 且具有性质 $P(t)$, 则 t 的最大值为 ()

- A. 6 B. 3 C. 2 D. 1

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中,

有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列条件中一定能得出 $\{a_n\}$ 是等比数列的有 ()

- A. $a_{n+1} = -a_n$ B. $S_n = 2a_n - 1$
C. $\ln a_n + \ln a_{n+2} = 2 \ln a_{n+1}$ D. $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ -x^2 + 1, & x < 0 \end{cases}$, 则下列判断正确的是 ()

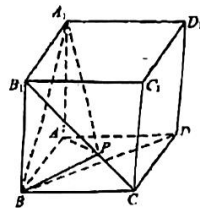
- A. $f(x)$ 为奇函数
B. 对任意 $x_1, x_2 \in R$, 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \leq 0$
C. 对任意 $x \in R$, 则有 $f(x) + f(-x) = 2$
D. 若函数 $y = |f(x)|$ 与 $y = mx$ 无交点, 则实数 m 的取值范围是 $(0, 2)$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 由以下各个条件分别能得出 $\triangle ABC$ 为等边三角形的有: ()

- A. 已知 $a + b = 2c$ 且 $A + B = 2C$; B. 已知 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $b = c$;
C. 已知 $a + b = 2c$ 且 $a^2 + b^2 = 2c^2$; D. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{\cos B}{\cos A}$ 且 $A = 60^\circ$.

12. 如图, 在棱长为 3 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为线段 B_1C 上的动点, 则下列结论正确的是 ()

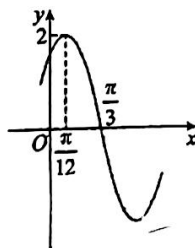
- A. 当 $B_1P = 2PC$ 时, $AP = \sqrt{14}$
B. 当 $B_1P = 2PC$ 时, 点 P 到平面 BB_1D_1 的距离为 $\sqrt{2}$
C. 直线 AP 与 BD 所成的角可能是 $\frac{\pi}{6}$
D. 若二面角 $B - AP - B_1$ 的平面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{6}$, 则 $\overline{B_1P} = \frac{1}{3}\overline{B_1C}$ 或 $\overline{B_1P} = \frac{5}{7}\overline{B_1C}$



第 II 卷 (总分 90 分)

三、填空题: 本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(-\frac{\pi}{4}) =$ _____.



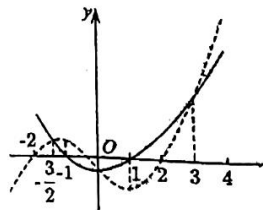
14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n + a_n = n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $\log_2(1 - a_{2023}) =$ _____

15. 过球 O 表面上一点 A 引三条长度相等的弦 AB 、 AC 、 AD , 且 AB 、 AC 、 AD 两两夹角都为 60° , 若 $BD = \sqrt{2}$, 则该球的体积为: _____

16. 已知函数 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图像如下图所示, 设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$. 给出下列四个结论:

- ① 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是减函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数;
- ② 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 在区间 $(-1, 1)$ 上是减函数;
- ③ 函数 $g(x)$ 有三个极值点;
- ④ 函数 $g(x)$ 有三个零点.

其中, 所有正确结论的序号是 _____



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos(2x - \frac{\pi}{3}) - 2\sin x \cos x$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及对称中心;
- (2) 当 $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.

18. (本小题满分 12 分)

已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_3 = 15$, a_1, a_4, a_{13} 成等比数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求数列 $\{a_{2^n - n}\}$ 的前 n 项和 T_n 大于 2020 的最小自然数 n .

19. (本小题满分 12 分)

在① $a \sin C = c \cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$, ② $\sqrt{3} \sin \frac{B+C}{2} = \sin A$, ③ $\cos 2A + 3 \cos A = 1$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面

问题中, 若问题中的 $\triangle ABC$ 存在, 求出其面积; 若不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a = 2\sqrt{3}$, $b + c = 4\sqrt{3}$, _____?

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp DC$, $PA = PD = PB = 2\sqrt{5}$,

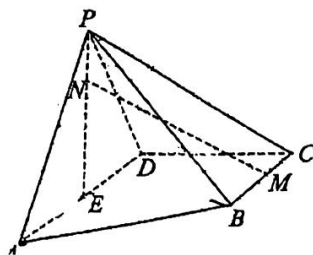
$BC = DC = \frac{1}{2}AD = 2$, E 为 AD 的中点.

(I) 求证: $PE \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 求二面角 $A-PB-C$ 的正弦值;

(III) 记 BC 的中点为 M , 若 N 在线段 PE 上,

且直线 MN 与平面 PAB 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{18}$, 求线段 EN 的长.



21. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2$, $S_{n+1} = 3S_n + 2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+2)}{n}$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 分别求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 c_n 的等差数列, 求数列 $\{b_n c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{x}$ ($m \in \mathbb{R}$).

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $x + 2y - 4 = 0$ 相切, 求 m 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值;

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 试求实数 m 的取值范围.

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索