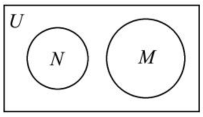
2024 届高三一轮复习联考(三)

数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】因为 M,N 是全集 U 的非空子集,且 $M\subseteq \complement_U N$,所以韦恩图为:



由韦恩图可知,D 正确.故选 D.

2.B 【解析】因为$(1+\mathrm{i})z=-2+\mathrm{i}$,所以$|z|=\left|\dfrac{-2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.故选 B.

3.B 【解析】对$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$两边平方,整理可得向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为 0,向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行且同向,从而存在实数 $t(t>0)$;由 $\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{b}$ 可得向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$平行,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向或者反向,因此“$\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{b}$”是“$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$”的必要不充分条件.故选 B.

4.D 【解析】由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=28$,得 $b=2\sqrt{7}$,设 AC 边上的高为 h,因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bh$,所以 $h=\dfrac{ac\sin B}{b}=\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$,即 AC 边上的高为$\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.故选 D.

5.D 【解析】根据题意得 2023 年初$(t=0)$时种群数量为 $k_0\cdot \mathrm{e}^{1.4\mathrm{e}}$,所以由 $y=k_0\cdot \mathrm{e}^{1.4\mathrm{e}-0.125n}<20\%\cdot k_0\cdot \mathrm{e}^{1.4\mathrm{e}}$,化简得 $\mathrm{e}^{-0.125n}<\dfrac{1}{5}$,则 $n>8\ln 5\approx 12.9$,又因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 n 的最小值为 13.故选 D.

6.B 【解析】由题意得 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$,过点$(2,0)$作曲线 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的两条切线,设切点坐标为$(x_0,x_0\mathrm{e}^{x_0})$,则$(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{x_0\mathrm{e}^{x_0}}{x_0-2}$,即$(x_0^2-2x_0-2)\mathrm{e}^{x_0}=0$,由于 $\mathrm{e}^{x_0}>0$,故 $x_0^2-2x_0-2=0$,$\Delta=12>0$,由题意可知 x_1,x_2 为 $x_0^2-2x_0-2=0$ 的两个解,则 $x_1+x_2=2$,$x_1x_2=-2$,故$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-1$,故选 B.

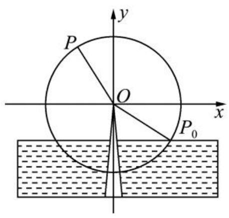
7.C 【解析】该数列的一阶商数列为 2,4,8,16,…,则二阶商数列为 2,2,2,…,因为二阶商数列是常数列,故二阶商数列后面的项均为 2,所以一阶商数列后面的项依次为 $2^5,2^6,2^7,\cdots$,从而原数列后面的项依次为 $2^{15},2^{21},\cdots$,故$A_7=2^{21}$.故选 C.

8.A 【解析】$f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$,由题意知当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以只需比较$\dfrac{1}{5}$,$\sin\dfrac{1}{5}$,$\ln\left(1+\dfrac{1}{5}\right)$的大小.当 $x>0$ 时,$x>\sin x$,则$\sin\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{5}$,所以 $a>b$;令 $g(x)=\sin x-\ln(1+x)$,$x\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$,则 $g'(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$,令 $\varphi(x)=g'(x)$,$x\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$,则 $\varphi'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$在区间$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$上单调递减,可得 $\varphi'(x)>\varphi'\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\sin\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2}>-\dfrac{1}{3}+\dfrac{9}{16}=\dfrac{11}{48}>0$,即 $\varphi'(x)>0$ 在区间$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$上恒成立,则$\varphi(x)$在区间$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$上单调递增,可得 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$,即 $g'(x)>0$ 在区间$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$上恒成立,可知 $g(x)$在区间$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$上单调递增,则 $g(x)>g(0)=0$ 在区间$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$上恒成立,令 $x=\dfrac{1}{5}\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$,则 $g\left(\dfrac{1}{5}\right)=\sin\dfrac{1}{5}-$

$\ln\left(1+\frac{1}{5}\right)>0$，即 $\sin\frac{1}{5}>\ln\frac{6}{5}$，所以 $b>c$.综上所述，$c<b<a$.故选 A.

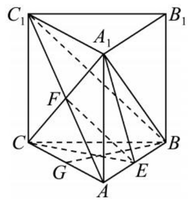
9.BCD 【解析】对于 A，正实数 a，b 满足 $a+b=1$，即有 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，可得 $0<ab\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时取等号，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}\geqslant 4$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时取等号，所以当 $a=b=\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$取得最小值 4，无最大值，所以 A 错误；对于 B，由选项 A 可知，$0<\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时取等号，所以 B 正确；对于 C，$\log_2 a+\log_2 b=\log_2(ab)\leqslant-2$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时等号成立，C 正确；对于 D，$2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时等号成立，D 正确.故选 BCD.

10.ACD 【解析】以 O 为坐标原点建立直角坐标系，如下图，设点 P 距离水面的高度 h(m)与时间 t(s)的函数解析式为$h=f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+B(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$，由题意知：$f(t)_{\max}=3$，$f(t)_{\min}=-1$，最小正周期 $T=60$，$\therefore A=2$，$B=1$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$，$\therefore f(0)=2\sin\varphi+1=0$，即 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，又由$|\varphi|<\pi$ 及题意，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+1$.对于 A，令$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解得 $t=20$，即点 P 第一次到达最高点需要 20 秒，A 正确；对于 B，令$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，解得 $t=50$，B 错误；对于 C，令 $2\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+1<0$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)<-\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{7\pi}{6}<\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$，解得 $40<t<60$，所以水轮转动一圈内，点 P 在水面下方的时间为 $60-40=20$ 秒，C 正确；对于 D，$\because f(30)=2\sin\left(\frac{\pi}{30}\times 30-\frac{\pi}{6}\right)+1=2\sin\frac{5\pi}{6}+1=2$，$\therefore$当水轮转动 30 秒时，点 P 距离水面的高度是 2 米，D 正确.故选 ACD.



11.ACD 【解析】连接 A_1C 与 AC_1 相交于 F，连接 EF，因为 F，E 分别为 AC_1，AB 中点，所以 $EF\parallel BC_1$，因为 $EF\subset$平面 A_1EC，$BC_1\not\subset$平面 A_1EC，所以 $BC_1\parallel$平面 A_1EC，故选项 A 正确.在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1A\perp$平面 ABC，又因为 $CE\subset$平面 ABC，则 $A_1A\perp CE$.又 $AB\perp CE$，$AA_1\cap AB=A$，$AA_1\subset$平面 AA_1B_1B，$AB\subset$平面 AA_1B_1B，所以 $CE\perp$平面 AA_1B_1B.又因为 $EA_1\subset$平面 AA_1B_1B，则 $A_1E\perp CE$，又 $AB\perp CE$，可知二面角A_1-EC-A 的平面角为$\angle A_1EA$，则 $\sin\angle A_1EA=\frac{AA_1}{A_1E}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故选项 B 错误.设点 A 到平面 A_1BC_1 的距离为 d，取 AC 中点 G，连接 BG，则 $V_{B-AA_1C_1}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle AA_1C_1}\times BG=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BA_1C_1}\times d$，又 $S_{\triangle AA_1C_1}=\frac{1}{2}AA_1\cdot A_1C_1=\frac{1}{2}$，$BG=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$BA_1=BC_1=\sqrt{2}$，$A_1C_1=1$，由余弦定理可得 $\cos\angle A_1BC_1=\frac{3}{4}$，所以 $\sin\angle A_1BC_1=\frac{\sqrt{7}}{4}$，所以

$S_{\triangle A_1BC_1}=\frac{1}{2}A_1B\times BC_1\times\sin\angle A_1BC_1=\frac{\sqrt{7}}{4}$.所以 $d=\frac{S_{\triangle AA_1C_1}\cdot BG}{S_{\triangle A_1BC_1}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,故选项C正确.设$\triangle ABC$外接圆半径为$r$,由正弦定理得 $2r=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,所以 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.又设三棱柱外接球半径为R,则三棱柱外接球与以$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$的外接圆为底面的圆柱外接球相同,则 $R=\sqrt{r^2+\left(\frac{1}{2}BB_1\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{6}$.故选项D正确.故选ACD.



12.ABC 【解析】因为 $f(x+1)$为偶函数,所以 $f(-x+1)=f(x+1)$,所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,故选项A正确;因为 $f(-x+1)=f(x+1)$,所以 $f(-x)=f(x+2)$,又因为 $f(x+2)$为偶函数,所以 $f(x+2)=f(-x+2)$,所以 $f(-x)=f(-x+2)$,所以 $f(x)=f(x+2)$,所以2为 $f(x)$的一个周期,故选项B正确;因为 $f(x+2)=f(-x+2)$,所以 $f'(x+2)=-f'(-x+2)$,所以 $f'(x)$的图象关于点$(2,0)$中心对称,故选项C正确;因为2为 $f(x)$的一个周期,又因为 $f(x+2)=f(-x+2)$,所以 $f(x)=f(-x)$,所以 $f'(x)=-f'(-x)$,所以 $f'(x)$为奇函数,故选项D错误.故选ABC.

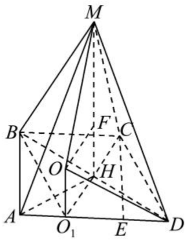
13.1 【解析】由题意可得:$f(-5)=f(-3)=f(-1)=f(1)=\log_2 2=1$.

14.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由 $1+\frac{\sqrt{3}}{\tan 80^\circ}=\frac{1}{\cos\alpha}$,得 $\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}+\frac{\sqrt{3}\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\sin 80^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 80^\circ\right)}{\sin 80^\circ}=\frac{2\sin(80^\circ+60^\circ)}{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{2\sin 140^\circ}{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{1}{\cos 40^\circ}=\frac{1}{\cos\alpha}$,则 $\cos\alpha=\cos 40^\circ$,$\because\alpha$ 是锐角,$\therefore\alpha=40^\circ$.则 $\sin(\alpha+20^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.$\frac{1}{2\,024}$ 【解析】根据题意可得$\{a_n\}$各项均不为0,则 $a_n-a_{n+1}=a_{n+1}a_n$,则$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$,故数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为2,公差为1的等差数列,则$\frac{1}{a_n}=n+1$,$a_n=\frac{1}{n+1}$,故 $a_{2\,023}=\frac{1}{2\,024}$.

16.20π 【解析】如图,取AD的两个三等分点O_1、E,连接BD、O_1C、CE,设$BD\cap O_1C=H$,连接MH、AH,则 $AO_1=\frac{1}{3}AD=1$,$\therefore O_1D=BC=2$,又$\because BC\parallel AD$,$\therefore BC\parallel O_1D$,所以,四边形$BCDO_1$为平行四边形.$\because O_1C\cap BD=H$,$\therefore H$为$BD$的中点,所以在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中,$AH=BH=DH=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$,由勾股定理可得 $O_1B=\sqrt{AO_1^2+AB^2}=2$,则 $O_1B=O_1D$,在$\mathrm{Rt}\triangle O_1AB$中,$\tan\angle AO_1B=\frac{AB}{AO_1}=\sqrt{3}$,$\therefore\angle AO_1B=\frac{\pi}{3}$,$\because BC\parallel AD$,$\therefore\angle CBO_1=\frac{\pi}{3}$,又 $BC=O_1D=O_1B$,则$\triangle O_1BC$为等边三角形,$\therefore O_1C=O_1B=O_1D=2$,则$O_1$是$\triangle BCD$的外接圆的圆心.因为 $MA=MB=MD=2\sqrt{3}$,H为BD的中点,$\therefore MH\perp BD$,$\because MA=MB$,$AH=BH$,$MH=$

MH，∴$\triangle MAH\cong\triangle MBH$，∴$\angle MHA=\angle MHB=\frac{\pi}{2}$，∴$MH\perp AH$，又∵$MH\perp BD$，$AH\cap BD=H$，∴$MH\perp$平面$ABCD$，且$MH=\sqrt{MA^2-AH^2}=3$.设$O$为三棱锥$M-BCD$外接球的球心，连接$OO_1$、$OM$、$OD$，则$OO_1$∥$MH$，过$O$作$OF\perp MH$，垂足为$F$，则外接球的半径$R$满足$R^2=OO_1^2+2^2=(3-OO_1)^2+O_1H^2$，设$OO_1=x$，又$O_1H=\frac{1}{2}O_1C=1$，解得$x=1$，从而$R^2=x^2+2^2=5$，故三棱锥$M-BCD$外接球的表面积为$4\pi R^2=20\pi$.



17.**解**：(1)设$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases}9a_1+36d=-99,\\4a_1+6d=16a_1+120d,\end{cases}$ ………… 2分

解得$\begin{cases}a_1=-19,\\d=2,\end{cases}$ ………… 4分

故$a_n=a_1+(n-1)d=2n-21$. ………… 5分

(2)由(1)可知，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2-20n=(n-10)^2-100$. ………… 7分

当$n=10$时，S_n取得最小值-100. ………… 8分

由$S_m\leqslant S_n+1$恒成立，得$m^2-20m+99\leqslant 0$，解得$9\leqslant m\leqslant 11$.

因为$m\in\mathbf{N}^*$，所以m的最大值为11. ………… 10分

18.**解**：(1)因为$\boldsymbol{m}=\left(2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right),\sqrt{3}\right)$，$\boldsymbol{n}=\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right),\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right)$，

所以$f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$， ………… 3分

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$， ………… 5分

所以$f(x)$的单调增区间为$\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. ………… 6分

(2)由$f(\omega x)=1$，得$2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+1=1$，则$\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=0$， ………… 7分

由$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，得$-\frac{\pi}{3}\leqslant 2\omega x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}$， ………… 9分

因为$f(\omega x)=1(\omega>0)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上有唯一解，

所以$0\leqslant\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}<\pi$， ………… 11分

得$\frac{1}{2}\leqslant\omega<2$. …………………………………………………………………… 12 分

19.**解**:(1)函数 $f(x)=x^3+\frac{3m}{2}x^2-3x+2$,求导得 $f'(x)=3x^2+3mx-3$. ………………………… 1 分

令 $3x^2+3mx-3<0$ 得$\frac{-m-\sqrt{m^2+4}}{2}<x<\frac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}$,

若 $f(x)$在$\left(\frac{1}{2},2\right)$存在单调递减区间, …………………………………………………… 3 分

$\frac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}>\frac{1}{2}$,………………………………………………………………… 4 分

解得 $m<\frac{3}{2}$,

所以实数 m 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$. …………………………………………………… 5 分

(2)由 $f'(x)=0$,即 $x^2+mx-1=0$,解得 $x_1=\frac{-m-\sqrt{m^2+4}}{2}$,$x_2=\frac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}$. ……………… 6 分

当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时,$f'(x)>0$,当 $x_1<x<x_2$ 时,$f'(x)<0$,即函数 $f(x)$在$(-\infty,x_1)$,$(x_2,+\infty)$上单调递增,在(x_1,x_2)上单调递减, …………………………………………………………………… 8 分

因此函数 $f(x)$在 x_2 处取得极小值,于是$\frac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}>m$,即$\sqrt{m^2+4}>3m$,当 $m\leqslant 0$ 时,不等式恒成立;

…………………………………………………………………………………………… 10 分

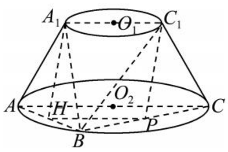
当 $m>0$ 时,解得 $0<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$, …………………………………………………………… 11 分

综上可知,实数 m 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ……………………………………………… 12 分

20.**解**:(1)存在,BC 中点即为所求. …………………………………………………………… 1 分

证明如下:取 BC 中点 P,连接 C_1P,取 AB 中点 H,连接 A_1H,PH,则有 $PH /\!/ AC$,$PH=\frac{1}{2}AC$. ………… 2 分

如图,在等腰梯形 A_1ACC_1 中,$AC /\!/ A_1C_1$,$AC=2A_1C_1$,所以 $HP /\!/ A_1C_1$,$HP=A_1C_1$,则四边形 A_1C_1PH 为平行四边形,所以 $C_1P /\!/ A_1H$. …………………………………………………………………… 4 分



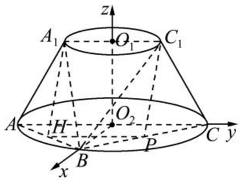
又 $A_1H\subset$平面 A_1AB,$C_1P\not\subset$平面 A_1AB,所以 $C_1P /\!/$平面 A_1AB. ………………………………… 5 分

(2)过点 B 作 $BO'\perp AC$ 于O',在等腰梯形 A_1ACC_1 中,$AC=2AA_1=2A_1C_1=4$,所以该梯形的高 $h=\sqrt{3}$, …

…………………………………………………………………………………………… 6 分

所以等腰梯形 A_1ACC_1 的面积为 $S=3\sqrt{3}$,所以四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S\times BO'=2\sqrt{3}$,解得 $BO'=2$,所以点O'与 O_2 重合. ………………………………………………………………… 7 分

以 O_2 为原点，$\overrightarrow{O_2B}$，$\overrightarrow{O_2C}$，$\overrightarrow{O_2O_1}$ 方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系.



则 $C(0,2,0)$，$B(2,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$A_1(0,-1,\sqrt{3})$，$C_1(0,1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$，…………………………………… 9 分

设平面 A_1AB 的一个法向量为 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{a}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ 2x_1+2y_1=0,\end{cases}$ 取 $z_1=1$，则 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$. …………………………………… 10 分

设平面 C_1CB 的一个法向量为 $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{b}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{b}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ -2x_2+2y_2=0,\end{cases}$ 取 $z_2=1$，则 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$. …………………………………… 11 分

设平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角为 α，

则 $\cos\alpha=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{|3-3+1|}{\sqrt{3+3+1}\times\sqrt{3+3+1}}=\dfrac{1}{7}$.

故平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{7}$. …………………………………… 12 分

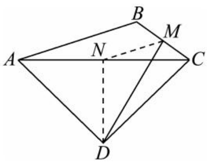
21. **解**：(1)在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=4+1-2\times2\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$. …………………………………… 2 分

取 AC 中点 N，连接 DN，MN.

$\because AD=CD$，$AD\perp CD$，N 为 AC 的中点，

$\therefore DN\perp AC$，$DN=\dfrac{1}{2}AC$. …………………………………… 4 分

则 $\triangle ACD$ 的面积 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times AC\times DN=\dfrac{1}{4}AC^2=\dfrac{7}{4}$. …………………………………… 5 分



(2)设 $\angle ABC=\alpha$，$\angle BAC=\beta$，

$\because M$，N 分别为边 BC，AC 的中点，

$\therefore MN\parallel AB$，$MN=\dfrac{1}{2}AB=1$，$\angle MNC=\angle BAC=\beta$. …………………………………… 6 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha=5-4\cos\alpha$. …………………… 7 分

由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin\alpha}=\dfrac{BC}{\sin\beta}$，

得 $\sin\beta=\dfrac{BC\cdot\sin\alpha}{AC}=\dfrac{\sin\alpha}{AC}$. ………………………………………………………………………… 8 分

在$\triangle MDN$ 中,$\cos\angle MND=\cos(\angle MNC+\angle CND)=\cos\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\beta$,

由余弦定理,得 $DM^2=MN^2+DN^2-2MN\cdot DN\cdot\cos\angle MND$

$=1+\dfrac{1}{4}AC^2+2\times1\times\dfrac{1}{2}AC\times\sin\beta$

$=1+\dfrac{1}{4}\times(5-4\cos\alpha)+2\times1\times\dfrac{1}{2}AC\times\dfrac{\sin\alpha}{AC}$

$=\dfrac{9}{4}-\cos\alpha+\sin\alpha$, ……………………………………………………………………………………… 9 分

$=\dfrac{9}{4}+\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$,其中 $0<\alpha<\pi$

当 $\alpha-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$ 时,DM 有最大值:

$$\sqrt{\frac{9}{4}+\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}+1}{4}}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}+1}{2}.$$

$\therefore DM$ 长度的最大值为$\dfrac{2\sqrt{2}+1}{2}$. …………………………………………………………………… 12 分

22.(1)**证明:**$f(x)=x(a\ln x-x-1)=ax\ln x-x^2-x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,

当 $a=1$ 时,$f'(x)=\ln x-2x$. ……………………………………………………………………………… 1 分

设 $g(x)=\ln x-2x$,则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{1-2x}{x}$,

由 $g(x)=0$,得 $x=\dfrac{1}{2}$,

当 $0<x<\dfrac{1}{2}$时,$g'(x)>0$;当 $x>\dfrac{1}{2}$时,$g'(x)<0$,

$\therefore g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减,

$\therefore g(x)$的最大值为 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{1}{2}-1=-\ln 2-1<0$, …………………………………………………… 3 分

$\therefore g(x)<0$,即 $f'(x)<0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)(ⅰ)**解:**由题意知 $a\neq0$,由 $f(x)+x=0$,得 $ax\ln x-x^2=0\Rightarrow a\ln x=x\Rightarrow\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{a}$,

设 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$,则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

由 $h'(x)=0$,得 $x=\mathrm{e}$,

当 $x\in(0,\mathrm{e})$时,$h'(x)>0$,函数 $h(x)$单调递增,

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$时,$h'(x)<0$,函数 $h(x)$单调递减,

$\therefore h(x)$有极大值,也是最大值,$h(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ……………………………………………………………… 6 分

又当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to -\infty$，当 $x\to +\infty$ 时，$h(x)>0$，$h(x)\to 0$，

所以要使 $f(x)+x=0$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2，则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{e}$，

即 $a>e$，即实数 a 的取值范围为 $(e,+\infty)$. …………………………………………………… 8 分

(ⅱ) **证明**：由(ⅰ)不妨设 $x_1>e>x_2>0$，

由 $f(x_1)+x_1=0$，$f(x_2)+x_2=0$，得 $x_1=a\ln x_1$，$x_2=a\ln x_2$，

则 $x_1-x_2=a(\ln x_1-\ln x_2)$，

要证 $x_1\cdot x_2>e^2$，即证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，等价于 $\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{a}>2$，

而 $\frac{1}{a}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，等价于证明 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$，

即证 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$，

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，$t>1$，

要证 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$，即证 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$， …………………………………………… 10 分

令 $\varphi(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0(t>1)$，

所以函数 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， …………………………………………………… 11 分

所以 $\varphi(t)>\varphi(1)=0$，即 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，

所以 $x_1\cdot x_2>e^2$. …………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。