

# 高三联考数学(理科)

## 考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分. 考试时间 120 分钟.
2. 请将各题答案填写在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容:集合与常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、平面向量.

## 第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x | x^2 > 2x\}$ , 则  $A \cap B =$   
 A.  $\{2, 3\}$       B.  $\{2\}$       C.  $\{3\}$       D.  $\emptyset$
2. 已知命题  $p: \exists x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{x^2} \in \mathbb{Q}$ , 命题  $q: \forall x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{x^2} \in \mathbb{Q}$ , 则  
 A.  $p$  的否定是  $q$       B.  $p$  的否定是  $\forall x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{x^2} \notin \mathbb{Q}$   
 C.  $q$  的否定是  $p$       D.  $q$  的否定是  $\exists x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{x^2} \notin \mathbb{Q}$
3. 要得到函数  $y = \sin(x+1)$  的图象, 只需要将函数  $y = \sin x$  的图象  
 A. 向左平移 1 个单位长度      B. 向右平移 1 个单位长度  
 C. 向上平移 1 个单位长度      D. 向下平移 1 个单位长度
4. 已知  $x, y$  为非零实数, 向量  $a, b$  为非零向量, 则“ $|a+b| = |a| + |b|$ ”是“存在非零实数  $x, y$ , 使得  $xa + yb = 0$ ”的  
 A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件
5. 命题  $p: \exists x \in \mathbb{R}, \sin x \geq 1$ , 命题  $q: \forall x \in (0, +\infty), e^x > \ln x$ , 则下列命题为真命题的是  
 A.  $p \wedge q$       B.  $(\neg p) \wedge q$       C.  $p \wedge (\neg q)$       D.  $(\neg p) \wedge (\neg q)$
6. 在等腰直角  $\triangle ABC$  中,  $AB \perp AC, BC = 2, D$  是边  $BC$  上一点, 且  $CD = 3BD$ , 则  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$   
 A.  $-1$       B.  $1$       C.  $-2$       D.  $2$
7. 若  $\tan \theta = 2$ , 则  $\frac{(\sin \theta + \cos \theta) \cos 2\theta}{\sin \theta} =$   
 A.  $-\frac{2}{5}$       B.  $-\frac{9}{10}$       C.  $\frac{2}{5}$       D.  $\frac{9}{10}$
8. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 且  $f(x+1)$  是奇函数,  $f(2x+3)$  是偶函数, 则  
 A.  $f(5) = 0$       B.  $f(4) = 0$   
 C.  $f(0) = 0$       D.  $f(-2) = 0$

9. 设  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 且  $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{1}{\cos \alpha}$ , 则

- A.  $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$       B.  $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$       C.  $2\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$       D.  $2\beta + \alpha = \frac{\pi}{2}$

10. 已知函数  $f(x) = x^3 + x + 1$ , 若  $f(1-x) + f(2x) > 2$ , 则  $x$  的取值范围是

- A.  $(-\infty, -1)$       B.  $(-\infty, 1)$       C.  $(-1, +\infty)$       D.  $(1, +\infty)$

11. 已知函数  $f(x) = \sin 2x - a \cos 2x$  的图象关于直线  $x = \frac{3\pi}{8}$  对称, 若  $f(x_1) + f(x_2) = 2\sqrt{2}$ , 则

$\frac{|x_2 - x_1|}{a}$  的最小值为

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\pi$       C.  $\frac{3\pi}{4}$       D.  $\frac{5\pi}{4}$

12.  $a = \sin \frac{\pi}{5}, b = e^{-\frac{1}{4}}, c = (\frac{1}{6})^{\frac{1}{8}}$ , 则

- A.  $a < c < b$       B.  $b < a < c$       C.  $c < b < a$       D.  $a < b < c$

## 第 II 卷

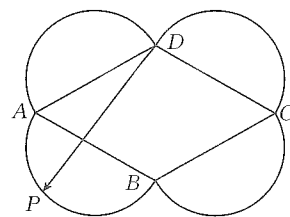
二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 函数  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$  的图象在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为 \_\_\_\_\_.

14. 若“ $\forall x \in \mathbb{R}, mx^2 + mx + 100 > 0$ ”是真命题, 则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = 2\sin \omega x (\omega > 0)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上恰有两个零点, 则实数  $\omega$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

16. 对称性是数学美的一个重要特征, 几何中的轴对称, 中心对称都能给人以美感, 激发学生对数学的兴趣. 如图, 在菱形  $ABCD$  中,  $\angle ABC = 120^\circ, AB = 2$ , 以菱形  $ABCD$  的四条边为直径向外作四个半圆,  $P$  是这四个半圆弧上的一动点, 若  $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DA} + \mu \overrightarrow{DC}$ , 则  $\lambda + \mu$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

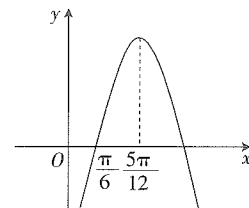


三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$  的部分图象如图所示.

- (1) 求  $f(x)$  的解析式;
- (2) 求  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的值域.



18. (12分)

已知函数  $f(x) = ax^4 + bx^3$  在  $x=1$  处有极值  $-1$ .

- (1) 求  $a, b$  的值;
- (2) 若函数  $g(x) = f(x) - mx$  在  $[-1, 1]$  上单调递增, 求  $m$  的取值范围.

19. (12分)

已知函数  $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + a$ , 且  $f(\lg 2) + f(\lg 5) = 3$ .

- (1) 求  $a$  的值;
- (2) 当  $x \in [-1, 1]$  时,  $f(x) \geq 4^x + m$  恒成立, 求  $m$  的取值范围.

20. (12分)

已知向量  $\mathbf{a} = (\sin x, \cos x)$ ,  $\mathbf{b} = (2\sqrt{3}\cos x - \sin x, \cos x)$ ,  $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

- (1) 求函数  $f(x)$  的单调递减区间;
- (2) 若  $f(x_0) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $x_0 \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ , 求  $\cos 2x_0$  的值.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = 2x^3 - ae^x$ .

- (1) 证明: 曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线经过定点.
- (2) 证明: 当  $a \in (-\infty, 0] \cup [\frac{24}{e^2}, +\infty)$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上无极值.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = 2a \ln x - x + \frac{1}{x}$ .

- (1) 若  $\forall x \in [1, +\infty)$ ,  $f(x) \leq 0$ , 求  $a$  的取值范围;
- (2) 证明:  $\forall a \in (1, +\infty)$ ,  $\forall x \in (1, +\infty)$ ,  $f(x) > -(x-1)^2$ .