2024届高三一轮复习联考(三) 全国卷
文 科 数 学 试 题

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟,满分150分

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知 M,N 是全集 U 的非空子集,且 $M\subseteq \complement_U N$,则

A.$N\subseteq M$　　B.$M\subseteq N$　　C.$\complement_U M\subseteq \complement_U N$　　D.$N\subseteq \complement_U M$

2.若复数 z 满足 $(1+i)z=-2+i$,则 $z=$

A.$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$　　B.$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$　　C.$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$　　D.$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

3.已知非零平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,那么"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$"是"$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$"的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

4.已知实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases} y\leqslant x, \\ x+y\geqslant 2, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值为

A.2　　B.3　　C.4　　D.6

5.记△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,$a=4$,$c=6$,$B=\frac{\pi}{3}$,则 AC 边上的高为

A.$\frac{\sqrt{21}}{7}$　　B.$\frac{2\sqrt{21}}{7}$　　C.$\frac{3\sqrt{21}}{7}$　　D.$\frac{6\sqrt{21}}{7}$

6.已知某物种 t 年后的种群数量 y 近似满足函数模型:$y=k_0\cdot e^{1.4e-0.125t}$ $(k_0>0)$.自2023年初起,经过 n 年后($n\in\mathbf{N}^*$),当该物种的种群数量不足2023年初的20%时,n 的最小值为(参考数据:$\ln 5\approx 1.609\ 4$)

A.10　　B.11　　C.12　　D.13

7.关于三条不同直线 a,b,l 以及两个不同平面 γ,β,下面命题正确的是

A.若 $a/\!/\gamma,b/\!/\gamma$,则 $a/\!/b$　　B.若 $a/\!/\gamma,b\perp\gamma$,则 $b\perp a$

C.若 $a/\!/\gamma,\gamma\perp\beta$,则 $a\perp\beta$　　D.若 $a\subset\gamma,b\subset\gamma$,且 $l\perp a,l\perp b$,则 $l\perp\gamma$

8.已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-ax}$ 在区间$[0,1]$上是减函数,则实数 a 的取值范围是

A.$(-\infty,2]$　　B.$(-\infty,0]$　　C.$[2,+\infty)$　　D.$[0,+\infty)$

9.函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(\varphi>0)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到函数 $g(x)$的图象,若函数 $g(x)$是偶函数,则 φ 的最小值为

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{5\pi}{6}$　　D.$\frac{2\pi}{3}$

10.过点$(2,0)$作曲线 $f(x)=xe^x$ 的两条切线,切点分别为$(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$,则 $x_1x_2=$

A.-2　　B.-1　　C.1　　D.2

11.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $a_1=1,a_{n+1}=2S_n(n\in\mathbf{N}^*)$,则有

A.数列$\{a_n\}$为等差数列　　B.数列$\{a_n\}$为等比数列

C.数列$\{S_n\}$为等差数列　　D.数列$\{S_n\}$为等比数列

12.已知函数 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的非常数函数,$f(x+1)$为偶函数,$f(4-x)=f(x)$,则

A.函数 $f(x)$为偶函数　　B.$f(x)$关于点$(1,0)$中心对称

C.$f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)$　　D.$f(x)$的最小正周期为 4

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1),x>0,\\ f(x+2),x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(-5)$的值为________.

14.已知 α 满足 $\sin\alpha+2\cos\alpha=0$,则 $\tan 2\alpha=$________.

15.若各项均不为 0 的数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{a_n+1}$,且 $a_1=\frac{1}{2}$,则 $a_{2023}=$________.

16.在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 为 A_1B_1 的中点,过直线 A_1C 作与平面 PBC_1 平行的截面,则该截面的面积为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：60 分。

17.(12 分)已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_5-a_1=30$，$S_4=30$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $b_n=\log_2 a_{n+1}+a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.(12 分)已知向量 $\boldsymbol{m}=\left(2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right),\sqrt{3}\right)$，向量 $\boldsymbol{n}=\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right),\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right)$，$f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$.

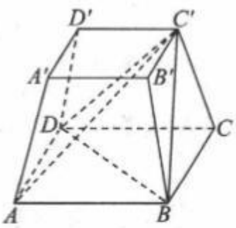
(1)求函数 $f(x)$的单调增区间；

(2)若 $f(\omega x)-1=0(\omega>0)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上有唯一解，求 ω 的取值范围.

19.(12 分)如图，棱台 $ABCD-A'B'C'D'$中，$AA'=BB'=CC'=DD'=\sqrt{5}$，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，底面 $A'B'C'D'$是边长为 2 的正方形，连接 AC'，BD，DC'.

(1)证明：$AC'\perp BD$；

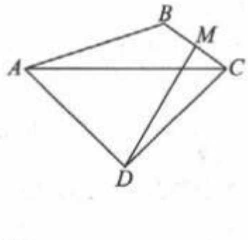
(2)求三棱锥 $D-BCC'$的体积.



20.(12 分)如图，在平面凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=2BC=2$，$AD=CD$，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，M 为 BC 边的中点.

(1)若$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，求$\triangle ACD$ 的面积；

(2)求 DM 的最大值.



21.(12分)已知函数 $f(x)=x(a\ln x-x-1)$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=1$ 时,求证:$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;

(2)若 $f(x)+x=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2,求实数 a 的取值范围.

(二)选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=5\sin\alpha,\\y=3\cos\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以原点 O 为极点,x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为$\rho=\dfrac{3}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

(1)求曲线 C 的普通方程;

(2)直线 l 与曲线C交于A,B两点,$P(-1,2)$,求$||PA|-|PB||$的值.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

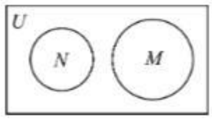
(1)求不等式$|x-1|+|x-2|\leqslant 5$的解集;

(2)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$,求证:$\left(\dfrac{1}{a+b}-1\right)\left(\dfrac{1}{b+c}-1\right)\left(\dfrac{1}{c+a}-1\right)\leqslant\dfrac{1}{8}$.

2024 届高三一轮复习联考(三)　全国卷

文科数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】因为 M,N 是全集 U 的非空子集，且 $M\subseteq \complement_U N$，所以韦恩图为：

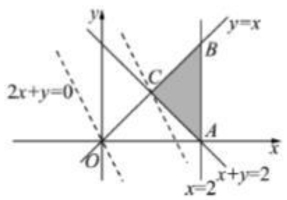


由韦恩图可知，D 正确.故选 D.

2.B 【解析】因为 $(1+\mathrm{i})z=-2+\mathrm{i}$，所以 $z=\frac{-2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-1+3\mathrm{i}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$.故选 B.

3.B 【解析】由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$ 及向量的减法法则，可得向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行且同向；若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，可得向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行且同向或者反向，因此“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”是“$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$”的必要不充分条件.故选 B.

4.B 【解析】画出可行域，如图阴影部分所示，当 $z=0$ 时，画出初始目标函数表示的直线 $2x+y=0$，平移目标函数后，当直线过点 $C(1,1)$ 时，取得最小值，$z_{\min}=2\times1+1=3$.故选 B.



5.D 【解析】由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=28$，得 $b=2\sqrt{7}$.设 AC 边上的高为 h，因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bh$，所以 $h=\frac{ac\sin B}{b}=\frac{6\sqrt{21}}{7}$，即 AC 边上的高为 $\frac{6\sqrt{21}}{7}$.故选 D.

6.D 【解析】根据题意得 2023 年初($t=0$)时种群数量为 $k_0\cdot e^{1.4e}$，所以由 $y=k_0\cdot e^{1.4e-0.125n}<20\%\cdot k_0\cdot e^{1.4e}$，化简得 $e^{-0.125n}<\frac{1}{5}$，则 $n>8\ln 5\approx12.9$，又因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 n 的最小值为 13.故选 D.

7.B 【解析】对于 A，因为与同一平面平行的两条直线的位置关系可以是平行，相交，异面，故不能确定两直线位置关系是平行，故 A 错误；对于 B，若 $a/\!/\gamma,b\perp\gamma$，则 $b\perp a$，故 B 正确；对于 C，若 $a/\!/\gamma,\gamma\perp\beta$，则 a 与 β 可能相交，平行或者包含，故 C 错误；对于 D，由线面垂直的判定定理知，一条直线垂直于一个平面中的两条相交直线时，线与面垂直，本选项不能确定 a,b 相交，故 D 不正确.故选 B.

8.B 【解析】因为函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-ax}$ 在区间$[0,1]$上是减函数，令 $g(x)=x^2-ax$，则函数 $g(x)=x^2-ax$ 在区间$[0,1]$上是增函数，所以 $\frac{a}{2}\leqslant0$，则 $a\leqslant0$.故选 B.

9.C 【解析】函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$ 的图象，又函数 $g(x)$ 是偶函数，则有 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.因为 $\varphi>0$，所以当 $k=1$ 时，φ 取最小值 $\frac{5\pi}{6}$.故选 C.

10.A 【解析】由题意得 $f'(x)=(x+1)e^x$，过点(2,0)作曲线 $f(x)=xe^x$ 的两条切线，设切点坐标为 $(x_0,x_0e^{x_0})$，则 $(x_0+1)e^{x_0}=\frac{x_0e^{x_0}}{x_0-2}$，即 $(x_0^2-2x_0-2)e^{x_0}=0$，由于 $e^{x_0}>0$，故 $x_0^2-2x_0-2=0$，$\Delta=12>0$，由题意可知 x_1,x_2 为 $x_0^2-2x_0-2=0$ 的两个解，故 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-2$.故选 A.

11.D 【解析】由题意，数列$\{a_n\}$的前 n 项和满足 $a_{n+1}=2S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=2S_{n-1}$，两式相减，可得 $a_{n+1}-a_n=2(S_n-S_{n-1})=2a_n$，可得 $a_{n+1}=3a_n$，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geqslant 2)$，又由 $a_1=1$，当 $n=1$ 时，$a_2=2S_1=2$，所以$\frac{a_2}{a_1}=2$.所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2\cdot 3^{n-2},n\geqslant 2,\end{cases}$ 故数列$\{a_n\}$既不是等差数列也不是等比数列，所以 A、B 选项错误；当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=\frac{1}{2}a_{n+1}=3^{n-1}$，又由 $n=1$ 时，$S_1=a_1=1$，符合上式，所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=3^{n-1}$.又由$\frac{S_{n+1}}{S_n}=3$，所以数列$\{S_n\}$为公比为 3 的等比数列，故 D 正确，C 错误.故选 D.

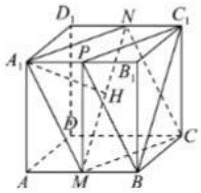
12.A 【解析】因为 $f(x+1)$为偶函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)$，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，$f(x+2)=f(-x)$.又因为 $f(x)$不是常数函数，$f(x)$不恒等于 0，所以 $f(x)$不关于点(1,0)中心对称，B 错误；因为 $f(4-x)=f(x)$，所以 $f(2+x)=f(2-x)$，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以由 $\begin{cases}f(2-x)=f(x+2),\\f(x+2)=f(-x),\end{cases}$ 得 $f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$是周期为 2 的函数，故 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}+2\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$，C 错误，D 错误，由$\begin{cases}f(x+2)=f(x),\\f(x+2)=f(-x),\end{cases}$ 得 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数，A 正确.故选 A.

13.1 【解析】由题意可得：$f(-5)=f(-3)=f(-1)=f(1)=\log_2 2=1$.

14.$\frac{4}{3}$ 【解析】由 $\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，得 $\tan\alpha=-2$，则 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times(-2)}{1-4}=\frac{4}{3}$.

15.$\frac{1}{2\ 024}$ 【解析】根据题意可得：$a_n-a_{n+1}=a_{n+1}a_n$，则$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$，故数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为 2，公差为 1 的等差数列，则$\frac{1}{a_n}=n+1$，$a_n=\frac{1}{n+1}$，故 $a_{2\,023}=\frac{1}{2\ 024}$.

16.$8\sqrt{6}$ 【解析】取 AB、D_1C_1 的中点，分别记为 M，N，连接 A_1M，MC，CN，A_1N，PM.因为 $A_1P\parallel NC_1$，$A_1P=NC_1$，所以四边形 A_1PC_1N 是平行四边形，所以 $A_1N\parallel PC_1$，$A_1N=PC_1$.因为 $PM\parallel CC_1$，$PM=CC_1$，所以四边形 $PMCC_1$ 是平行四边形，所以 $MC\parallel PC_1$，$MC=PC_1$，所以 $A_1N\parallel MC$，$A_1N=MC$，所以四边形 A_1MCN 是平行四边形.因为 $PC_1\parallel A_1N$，$PC_1\not\subset$平面 A_1MCN，$A_1N\subset$平面 A_1MCN，所以 $PC_1\parallel$平面 A_1MCN，同理可证 $PB\parallel$平面 A_1MCN，因为 $PC_1\cap PB=P$，PC_1，$PB\subset$平面 PBC_1，所以平面 $PBC_1\parallel$平面 A_1MCN，因此过直线 A_1C 作与平面 PBC_1 平行的截面，即是平行四边形 A_1MCN，连接 MN，作 $A_1H\perp MN$ 于点 H，由 $A_1M=A_1N=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$MN=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，可得 $A_1H=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle A_1MN}=\frac{1}{2}\times MN\times A_1H=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{6}$，所以平行四边形 A_1MCN 的面积为 $2S_{\triangle A_1MN}=8\sqrt{6}$.



17.解:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,依题意$q\neq1$,

于是$\begin{cases}a_1(q^4-1)=30,\\ \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=30,\end{cases}$ 解得$a_1=2,q=2$, ………………………… 3分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}=2\times2^{n-1}=2^n$. ………………………… 6分

(2)由(1)知,$b_n=\log_2a_{n+1}+a_n=\log_2 2^{n+1}+2^n=n+1+2^n$, ………………………… 8分

所以$T_n=\dfrac{2+(n+1)}{2}\cdot n+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=\dfrac{n^2+3n}{2}+2^{n+1}-2$. ………………………… 12分

18.解:(1)因为$\boldsymbol{m}=\left(2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right),\sqrt{3}\right)$,$\boldsymbol{n}=\left(\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right),\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$,

所以$f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ ………………………… 1分

$=1-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$. ………………………… 3分

由$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$, ………………………… 4分

得$-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以$f(x)$的单调增区间为$\left[-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$. ………………………… 6分

(2)由$f(\omega x)-1=0$,得$2\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=1$,得$\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$, ………………………… 7分

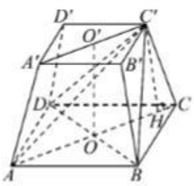
由$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$,得$-\dfrac{\pi}{3}\leqslant2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{2\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}$, ………………………… 9分

因为$f(\omega x)-1=0(\omega>0)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$上有唯一解,

所以$0\leqslant\dfrac{2\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}<\pi$, ………………………… 11分

解得$\dfrac{1}{2}\leqslant\omega<2$,故$\omega$的取值范围是$\left[\dfrac{1}{2},2\right)$. ………………………… 12分

19.(1)证明:如图,连接AC交BD于点O.



由题意可知该几何体为正四棱台，在正方形 $ABCD$ 中，$BD\perp AC$. …………………………………………… 1 分

取 $A'C'$ 中点 O'，连接 OO'，易知 $OO'\perp$ 底面 $ABCD$.

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $OO'\perp BD$， …………………………………………………………… 2 分

因为 $AC\cap OO'=O$，AC、$OO'\subset$ 平面 $ACC'A'$，

所以 $BD\perp$ 平面 $ACC'A'$. ……………………………………………………………………………… 3 分

而 $AC'\subset$ 平面 $ACC'A'$，所以 $AC'\perp BD$. …………………………………………………………… 4 分

(2)解：$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$. ……………………………………………………………… 6 分

因为底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，底面 $A'B'C'D'$ 是边长为 2 的正方形，所以底面 $ABCD$、底面 $A'B'C'D'$ 的对角线长的一半分别为 $2\sqrt{2}$、$\sqrt{2}$. ……………………………………………………………… 8 分

设 $C'H\perp AC$，垂足为 H，所以高 $C'H=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$， …………………………… 10 分

所以 $V_{D-BCC'}=V_{C'-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot C'H=\frac{1}{3}\times8\times\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$. ……………………………… 12 分

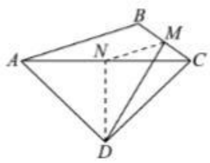
20.解：(1)在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\frac{2\pi}{3}=4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$. ……………………………………………………………………………………………… 2 分

取 AC 中点 N，连接 DN、MN，

$\because AD=CD$，$AD\perp CD$，N 为 AC 的中点，

$\therefore DN\perp AC$，$DN=\frac{1}{2}AC$. ………………………………………………………………… 4 分

则 $\triangle ACD$ 的面积 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times AC\times DN=\frac{1}{4}AC^2=\frac{7}{4}$. ………………………………………… 5 分



(2)设 $\angle ABC=\alpha$，$\angle BAC=\beta$.

$\because M$、N 分别为边 BC、AC 的中点，

$\therefore MN\parallel AB$，$MN=\frac{1}{2}AB=1$，$\angle MNC=\angle BAC=\beta$. ………………………………………… 6 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha=5-4\cos\alpha$. ……………………… 7 分

由正弦定理 $\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin\beta}$，

得 $\sin\beta=\frac{BC\cdot\sin\alpha}{AC}=\frac{\sin\alpha}{AC}$. …………………………………………………………………… 8 分

在 $\triangle MDN$ 中，$\cos\angle MND=\cos(\angle MNC+\angle CND)=\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\beta$，

由余弦定理，得 $DM^2=MN^2+DN^2-2MN\cdot DN\cdot\cos\angle MND$

$=1+\frac{1}{4}AC^2+2\times1\times\frac{1}{2}AC\times\sin\beta$

$=1+\frac{1}{4}\times(5-4\cos\alpha)+2\times1\times\frac{1}{2}AC\times\frac{\sin\alpha}{AC}$.

$=\frac{9}{4}-\cos\alpha+\sin\alpha$，……………………………………………………………… 9 分

$=\frac{9}{4}+\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$，其中 $0<\alpha<\pi$，

当 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$ 时，DM 有最大值：

$\sqrt{\frac{9}{4}+\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}+1}{4}}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$.

$\therefore DM$ 长度的最大值为 $\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$. ……………………………………………………… 12 分

21.(1)证明：$f(x)=x(a\ln x-x-1)=ax\ln x-x^2-x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\ln x-2x$，……………………………………………………………… 1 分

设 $g(x)=\ln x-2x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}$.

由 $g(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，……………………………… 3 分

$\therefore g(x)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-1=-\ln 2-1<0$，

$\therefore g(x)<0$，即 $f'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立， ……………………………………… 4 分

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………………………………… 5 分

(2)解：由 $f(x)+x=0$，得 $ax\ln x-x^2=0$. 当 $a=0$ 时，得 $x^2=0$，此时两根相等，不满足题意，故 $a\neq0$.

$a\ln x=x\Rightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{a}$. ……………………………………………………………… 6 分

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

由 $h'(x)=0$，得 $x=e$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减，……………………………………… 8 分

$\therefore h(x)$ 有极大值也是最大值 $h(e)=\frac{1}{e}$.

当 $0<x<1$ 时，$h(x)<0$，当 $x>1$ 时，$h(x)>0$，且 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to0$. …………………… 10 分

要使 $f(x)+x=0$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2，则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{e}$，

即 $a>e$,即实数 a 的取值范围为 $(e,+\infty)$. …………………………………………………… 12 分

22.解:(1)由 $\begin{cases} x=5\sin\alpha, \\ y=3\cos\alpha, \end{cases}$ 消去 α 得 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$,

所以曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. …………………………………………………… 2 分

(2)直线 l 的极坐标方程为 $\rho=\frac{3}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$,故其直角坐标方程为 $x-y+3=0$,显然点 $P(-1,2)$ 在直线 l 上,

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t. \end{cases}$ …………………………………………………… 5 分

把 $\begin{cases} x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$ 代入 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$,整理得 $17t^2+41\sqrt{2}t-116=0$, ………………………… 7 分

设点 A,点 B 对应的参数分别为 t_1,t_2,

则 $t_1+t_2=-\frac{41\sqrt{2}}{17}$,$t_1t_2=-\frac{116}{17}<0$,

所以 $||PA|-|PB||=||t_1|-|t_2||=|t_1+t_2|=\frac{41\sqrt{2}}{17}$. …………………………………………… 10 分

23.(1)解:当 $x\leqslant1$ 时,不等式可化为:$3-2x\leqslant5\Rightarrow x\in[-1,1]$, ………………………………… 1 分

当 $1<x<2$ 时,不等式可化为 $1\leqslant5\Rightarrow x\in(1,2)$, …………………………………………………… 2 分

当 $x\geqslant2$ 时,不等式可化为 $2x-3\leqslant5\Rightarrow x\in[2,4]$, …………………………………………… 3 分

综上,$|x-1|+|x-2|\leqslant5$ 的解集为 $[-1,4]$. …………………………………………………… 5 分

(2)证明:$\because a+b+c=1$,$a,b,c\in\mathbf{R}^+$,

$\therefore\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{c+a}-1\right)=\frac{c}{a+b}\times\frac{a}{b+c}\times\frac{b}{c+a}$. …………………………… 7 分

故 $\frac{c}{a+b}\times\frac{a}{b+c}\times\frac{b}{c+a}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}\times\frac{a}{2\sqrt{bc}}\times\frac{b}{2\sqrt{ca}}=\frac{1}{8}$. …………………………………… 9 分

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时,取等号. …………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服

务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。