2024届高三一轮复习联考（三）全国卷
理科数学试题

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知M,N是全集U的非空子集，且$M\subseteq\complement_U N$，则

A.$N\subseteq M$　　B.$M\subseteq N$　　C.$\complement_U M\subseteq\complement_U N$　　D.$N\subseteq\complement_U M$

2.若z满足$(1+i)z=-2-i$，则$|z|=$

A.$\frac{5}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C.5　　D.$\sqrt{10}$

3.已知非零平面向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，那么"$\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{b}$"是"$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$"的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

4.若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}2x-y+1\geqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0,\\ x-2y-2\leqslant 0,\end{cases}$则$z=4x+y$的最大值为

A.2　　B.5　　C.8　　D.10

5.记$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$a=4$，$c=6$，$B=\frac{\pi}{3}$，则AC边上的高为

A.$\frac{\sqrt{21}}{7}$　　B.$\frac{2\sqrt{21}}{7}$　　C.$\frac{3\sqrt{21}}{7}$　　D.$\frac{6\sqrt{21}}{7}$

6.已知某物种t年后的种群数量y近似满足函数模型：$y=k_0\cdot e^{1.4-0.125t}(k_0>0)$，自2023年初起，经过$n$年后$(n\in\mathbf{N}^*)$，当该物种的种群数量不足2023年初的20%时，$n$的最小值为(参考数据：$\ln 5\approx 1.6094$)

A.10　　B.11　　C.12　　D.13

7.下列选项中,能判定平面 α 和平面 β 平行的是

A.α 内有无数条直线都与 β 平行　　B.α 内的任意一条直线都与 β 平行

C.α 与 β 垂直于同一平面　　D.α 与 β 平行于同一直线

8.已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-ax}$ 在区间 $[0,1]$ 上是减函数,则实数 a 的取值范围是

A.$(-\infty,2]$　　B.$(-\infty,0]$　　C.$[2,+\infty)$　　D.$[0,+\infty)$

9.已知奇函数 $f(x)=2\cos(\omega x-\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 图象的相邻两个对称中心的距离为 2π,将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得函数 $g(x)$ 的图象,则 $g(x)$ 的图象

A.关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称　　B.关于点 $\left(-\frac{5\pi}{3},0\right)$ 对称

C.关于直线 $x=-\frac{\pi}{3}$ 对称　　D.关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

10.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R,$f(x+1)$ 为偶函数,$f(4-x)=f(x)$,则

A.函数 $f(x)$ 为偶函数　　B.$f(3)=0$

C.$f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)$　　D.$f(2\,023)=0$

11.对于一个给定的数列 $\{a_n\}$,令 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$,则数列 $\{b_n\}$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的一阶商数列,再令 $c_n=\frac{b_{n+1}}{b_n}$,则数列 $\{c_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的二阶商数列.已知数列 $\{A_n\}$ 为 1,2,8,64,1 024,…,且它的二阶商数列是常数列,则 $A_7=$

A.2^{15}　　B.2^{19}　　C.2^{21}　　D.2^{28}

12.已知函数 $f(x)=e^x+e^{-x}$,设 $a=f\left(\frac{1}{5}\right)$,$b=f\left(\sin\frac{1}{5}\right)$,$c=f\left(\ln\frac{5}{3}\right)$,则

A.$c<b<a$　　B.$a<b<c$　　C.$b<a<c$　　D.$b<c<a$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1),x>0,\\ f(x+2),x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(-5)$ 的值为________.

14.已知 α 为锐角且满足 $1+\frac{\sqrt{3}}{\tan 80^\circ}=\frac{1}{\cos\alpha}$,则 $\sin(\alpha+20^\circ)=$________.

15.已知各项均不为 0 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{a_n+1}$,且 $a_1=\frac{1}{2}$,则 $a_{2023}=$________.

16.在四棱锥 $M-ABCD$ 中,$BC/\!/AD$,$AB\perp AD$,$AB=\sqrt{3}$,$AD=3$,$BC=2$,$MA=MB=MD=2\sqrt{3}$,则三棱锥 $M-BCD$ 外接球的表面积为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_{[illegible]}=-99$，$S_{[illegible]}=S_{[illegible]}$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若对任意正整数 n，均有 $S_n \leqslant S_{[illegible]}+1$，求正整数 m 的最大值.

18.（12 分）已知向量 $\boldsymbol{m}=\left(2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right),\sqrt{3}\right)$，向量 $\boldsymbol{n}=\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right),\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right)$，$f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$.

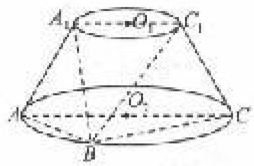
（1）求函数 $f(x)$ 的单调增区间；

（2）若 $g(x)=f(\omega x)-1(\omega>0)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上有唯一的零点，求 ω 的取值范围.

19.（12 分）如图，圆台 O_1O_2 的轴截面为等腰梯形 A_1ACC_1，$AC=4$，$AA_1=A_1C_1=2$，B 为下底面圆周上异于 A，C 的点.

（1）在线段 BC 上是否存在一点 P，使得 C_1P∥平面 A_1AB？若存在，指出点 P 的位置，并证明；若不存在，请说明理由；

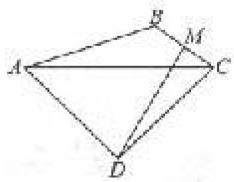
（2）若四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 的体积为 $2\sqrt{3}$，求平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角的余弦值.



20.（12 分）如图，在平面凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=2BC=2$，$AD=CD$，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，M 为边 BC 的中点.

（1）若 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，求 $\triangle ACD$ 的面积；

（2）求 DM 的最大值.



一轮复习联考（三） 全国卷 理科数学试题 第 3 页（共 4 页）

21.(12 分)已知函数 $f(x)=x(a\ln x-x-1)$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=1$ 时,求证:$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;

(2)若 $f(x)+x=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(ⅰ)求实数 a 的取值范围;

(ⅱ)求证:$x_1\cdot x_2>e^2$.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=5\sin\alpha,\\ y=3\cos\alpha\end{cases}$ (α 为参数),以原点 O 为极点,x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{3}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

(1)求曲线 C 的普通方程;

(2)直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,$P(-1,2)$,求 $||PA|-|PB||$ 的值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

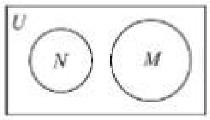
(1)求不等式 $|x-1|+|x-2|\leqslant 5$ 的解集;

(2)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$,求证:$\left(\dfrac{1}{a+b}-1\right)\left(\dfrac{1}{b+c}-1\right)\left(\dfrac{1}{c+a}-1\right)\leqslant\dfrac{1}{8}$.

2024 届高三一轮复习联考(三)　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】因为 M,N 是全集 U 的非空子集,且 $M\subseteq \complement_U N$,所以韦恩图为:

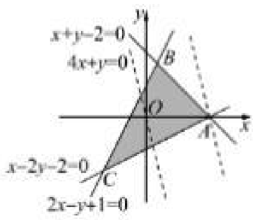


由韦恩图可知,D 正确.故选 D.

2.B 【解析】因为 $(1+\mathrm{i})z=-2+\mathrm{i}$,所以 $|z|=\left|\dfrac{-2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|=\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.故选 B.

3.B 【解析】对 $|\boldsymbol a-\boldsymbol b|=|\boldsymbol a|-|\boldsymbol b|$ 两边平方,整理可得向量 $\boldsymbol a$ 与 $\boldsymbol b$ 的夹角为 0,向量 $\boldsymbol a$ 与 $\boldsymbol b$ 平行且同向,从而存在实数 $t(t>0)$ 满足 $\boldsymbol a=t\boldsymbol b$;由 $\boldsymbol a=t\boldsymbol b$ 可得向量 $\boldsymbol a,\boldsymbol b$ 平行,$\boldsymbol a$ 与 $\boldsymbol b$ 同向或者反向. 因此“$\boldsymbol a=t\boldsymbol b$”是“$|\boldsymbol a-\boldsymbol b|=|\boldsymbol a|-|\boldsymbol b|$”的必要不充分条件.故选 B.

4.C 【解析】画出可行域如图所示,



联立 $\begin{cases}x+y-2=0,\\ x-2y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=0,\end{cases}$ 即 $A(2,0)$,由图可知当直线 $z=4x+y$ 过点 $A(2,0)$ 时,z 取得最大值,最大值为 8.故选 C.

5.D 【解析】由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=28$,得 $b=2\sqrt7$,设 AC 边上的高为 h,因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac12 ac\sin B=\dfrac12 bh$,所以 $h=\dfrac{ac\sin B}{b}=\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$,即 AC 边上的高为 $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.故选 D.

6.D 【解析】根据题意得 2023 年初($t=0$)时种群数量为 $k_0\cdot e^{-\lambda t}$,所以由 $y=k_0\cdot e^{-\lambda t-0.125n}<20\%\cdot k_0\cdot e^{-\lambda t}$,化简得 $e^{-0.125n}<\dfrac15$,则 $n>8\ln5\approx12.9$,又因为 $n\in\mathbf N^*$,所以 n 的最小值为 13.故选 D.

7.B 【解析】对于 A,当 α 内有无数条直线都与 β 平行,平面 α 与平面 β 可能平行,也可能是相交的,所以 A 不正确;对于 B,若平面 α 内的任意一条直线都与 β 平行,则平面 α 内必存在两条相交直线和平面 β 平行,根据面面平行的判定定理,可得 $\alpha/\!/\beta$,所以 B 正确;对于 C,垂直于同一平面的两个平面不一定平行,还可以相交,所以 C 不正确;对于 D,平行于同一条直线的两个平面可能平行,也可能相交故 D 不正确.故选 B.

8.B 【解析】因为函数 $f(x)=\left(\dfrac13\right)^{x^2-ax}$ 在区间$[0,1]$上是减函数,令 $g(x)=x^2-ax$,则函数 $g(x)=x^2-ax$ 在区间$[0,1]$是增函数,所以 $\dfrac{a}{2}\leqslant0$,则 $a\leqslant0$.故选 B.

9.B 【解析】相邻两对称中心的距离为 2π,则 $\dfrac T2=2\pi$,则 $T=4\pi$,$T=\dfrac{2\pi}{\omega}\Rightarrow\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac12$.已知 $f(x)$ 为奇函数,则 $f(0)=0$,即 $2\cos\varphi=0$,根据 $0<\varphi<\pi$ 可知 $\varphi=\dfrac\pi2$,则 $f(x)=2\cos\left(\dfrac12x-\dfrac\pi2\right)=2\sin\dfrac12x$,$g(x)=$

$2\sin\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.令$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$x=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,故A错误,B正确;令$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,故C、D错误.故选B.

10.A 【解析】因为$f(x+1)$为偶函数,所以$f(x+1)=f(-x+1)$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,所以$f(x+2)=f(-x)$.又因为$f(x+4)=f(-x)$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称,所以由$\begin{cases}f(x+4)=f(x+2),\\f(x+2)=f(-x),\end{cases}$得$f(x+2)=f(x)$,所以$f(x)$是周期为2的函数.由$\begin{cases}f(x+2)=f(x),\\f(x+2)=f(-x)\end{cases}$得$f(-x)=f(x)$,所以$f(x)$为偶函数.故选A.

11.C 【解析】该数列的一阶商数列为2,4,8,16,…,则二阶商数列为2,2,2,…,因为二阶商数列是常数列,故二阶商数列后面的项均为2,所以一阶商数列后面的项依次为$2^5,2^6,2^7$,…,从而原数列后面的项依次为$2^{15},2^{21}$,…,故$A_7=2^{21}$.故选C.

12.A 【解析】$f'(x)=e^x-e^{-x}$,由题意知当$x>0$时,$f'(x)>0$,即$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以只需比较$\frac{1}{5},\sin\frac{1}{5},\ln\left(1+\frac{1}{5}\right)$的大小.当$x>0$时,$x>\sin x$,则$\sin\frac{1}{5}<\frac{1}{5}$,所以$a>b$;令$g(x)=\sin x-\ln(1+x)$,$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$,则$g'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$,令$\varphi(x)=g'(x)$,$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$,则$\varphi'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递减,可得$\varphi'(x)>\varphi'\left(\frac{1}{3}\right)=-\sin\frac{1}{3}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}>-\frac{1}{3}+\frac{9}{16}=\frac{11}{48}>0$,即$\varphi'(x)>0$在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上恒成立,则$\varphi(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递增,可得$\varphi(x)>\varphi(0)=0$,即$g'(x)>0$在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上恒成立,可知$g(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递增,则$g(x)>g(0)=0$在区间$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上恒成立,令$x=\frac{1}{5}\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$,则$g\left(\frac{1}{5}\right)=\sin\frac{1}{5}-\ln\left(1+\frac{1}{5}\right)>0$,即$\sin\frac{1}{5}>\ln\frac{6}{5}$,所以$b>c$.综上所述,$c<b<a$.故选A.

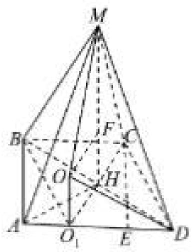
13.1 【解析】由题意可得:$f(-5)=f(-3)=f(-1)=f(1)=\log_2 2=1$.

14.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由$1+\frac{\sqrt{3}}{\tan 80^\circ}=\frac{1}{\cos\alpha}$,得$\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}+\frac{\sqrt{3}\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\sin 80^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 80^\circ\right)}{\sin 80^\circ}=\frac{2\sin(80^\circ+60^\circ)}{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{2\sin 140^\circ}{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=\frac{1}{\cos 40^\circ}=\frac{1}{\cos\alpha}$,则$\cos\alpha=\cos 40^\circ$,$\because\alpha$是锐角,$\therefore\alpha=40^\circ$,则$\sin(\alpha+20^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.$\frac{1}{2\,024}$ 【解析】根据题意可得$\{a_n\}$各项均不为0,则$a_n-a_{n+1}=a_{n+1}a_n$,则$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$,故数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为2,公差为1的等差数列,则$\frac{1}{a_n}=n+1$,$a_n=\frac{1}{n+1}$,故$a_{2\,023}=\frac{1}{2\,024}$.

16.20π 【解析】如图,取AD的两个三等分点O_1、E,连接BD、O_1C、CE,设$BD\cap O_1C=H$,连接MH、AH,则$AO_1=\frac{1}{3}AD=1$,$\therefore O_1D=BC=2$,又$\because BC/\!/AD$,$\therefore BC/\!/O_1D$,所以,四边形$BCDO_1$为平行四边形.$\because O_1C\cap BD=H$,$\therefore H$为BD的中点,所以在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中,$AH=BH=DH=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$,由勾股定理可得$O_1B=\sqrt{AO_1^2+AB^2}=2$,则$O_1B=O_1D$,在$\mathrm{Rt}\triangle O_1AB$中,$\tan\angle AO_1B=\frac{AB}{AO_1}=\sqrt{3}$,$\therefore\angle AO_1B=\frac{\pi}{3}$,$\because BC/\!/AD$,

$\therefore \angle CBO_1=\frac{\pi}{3}$，又 $BC=O_1D=O_1B$，则$\triangle O_1BC$ 为等边三角形，$\therefore O_1C=O_1B=O_1D=2$，则 O_1 是$\triangle BCD$ 的外接圆的圆心．因为 $MA=MB=MD=2\sqrt{3}$，H 为 BD 的中点，$\therefore MH\perp BD$．$\because MA=MB$，$AH=BH$，$MH=MH$，$\therefore \triangle MAH\cong\triangle MBH$，$\therefore \angle MHA=\angle MHB=\frac{\pi}{2}$，$\therefore MH\perp AH$．又$\because MH\perp BD$，$AH\cap BD=H$，$\therefore MH\perp$平面 $ABCD$，且 $MH=\sqrt{MA^2-AH^2}=3$．设 O 为三棱锥 $M-BCD$ 外接球的球心，连接 OO_1、OM、OD，则 $OO_1/\!/MH$，过 O 作 $OF\perp MH$，垂足为 F，则外接球的半径 R 满足 $R^2=OO_1^2+2^2=(3-OO_1)^2+O_1H^2$，设 $OO_1=x$，又 $O_1H=\frac{1}{2}O_1C=1$，解得 $x=1$，从而 $R^2=x^2+2^2=5$，故三棱锥 $M-BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$．



17．解：(1)设$\{a_n\}$的公差为 d，则$\begin{cases}9a_1+36d=-99,\\4a_1+6d=16a_1+120d.\end{cases}$ ……………………………… 2 分

解得$\begin{cases}a_1=-19,\\d=2.\end{cases}$ ……………………………… 4 分

故 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-21$． ……………………………… 6 分

(2)由(1)可知，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2-20n=(n-10)^2-100$． ……………………………… 8 分

当 $n=10$ 时，S_n 取得最小值 -100． ……………………………… 10 分

由 $S_m\leqslant S_n+1$ 恒成立，得 $m^2-20m+99\leqslant 0$，解得 $9\leqslant m\leqslant 11$．

因为 $m\in\mathbf{N}^*$，所以 m 的最大值为 11． ……………………………… 12 分

18．解：(1)因为 $\boldsymbol{m}=\left(2\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right),\sqrt{3}\right)$，$\boldsymbol{n}=\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right),\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right)$，

所以 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$． ……………………………… 3 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$， ……………………………… 5 分

所以 $f(x)$的单调增区间为$\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$． ……………………………… 6 分

(2)由 $f(\omega x)=1$，得 $2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+1=1$，则 $\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=0$， ……………………………… 7 分

由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，得 $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2\omega x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}$， ……………………………… 9 分

因为 $f(\omega x)=1(\omega>0)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上有唯一解，

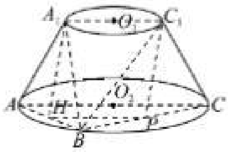
所以 $0<\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}<\pi$, …………………………………………………… 11 分

得 $\frac{1}{2}<\omega<2$. …………………………………………………… 12 分

19.解:(1)存在,BC 中点即为所求. …………………………………………………… 1 分

证明如下:取 BC 中点 P,连接 C_1P,取 AB 中点 H,连接 A_1H,PH,则有 $PH\parallel AC$,$PH=\frac{1}{2}AC$. ………… 2 分

如图,在等腰梯形 A_1ACC_1 中,$AC\parallel A_1C_1$,$AC=2A_1C_1$,所以 $HP\parallel A_1C_1$,$HP=A_1C_1$,则四边形 A_1C_1PH 为平行四边形,所以 $C_1P\parallel A_1H$. …………………………………………………… 4 分

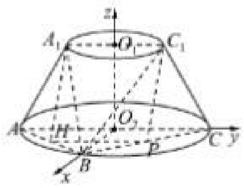


又 $A_1H\subset$ 平面 A_1AB,$C_1P\not\subset$ 平面 A_1AB,所以 $C_1P\parallel$ 平面 A_1AB. …………………………………………………… 5 分

(2)过点 B 作 $BO'\perp AC$ 于 O',在等腰梯形 A_1ACC_1 中,$AC=2AA_1=2A_1C_1=4$,所以该梯形的高 $h=\sqrt{3}$, ………………………………………………………………………… 6 分

所以等腰梯形 A_1ACC_1 的面积为 $S=3\sqrt{3}$,所以四棱锥 $B-A_1ACC_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S\times BO'=2\sqrt{3}$,解得 $BO'=2$,所以点 O' 与 O_2 重合. …………………………………………………… 7 分

以 O_2 为原点,$\overrightarrow{O_2B}$,$\overrightarrow{O_2C}$,$\overrightarrow{O_2O_1}$ 方向为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系.



则 $C(0,2,0)$,$B(2,0,0)$,$A(0,-2,0)$,$A_1(0,-1,\sqrt{3})$,$C_1(0,1,\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$, ……………………………… 9 分

设平面 A_1AB 的一个法向量为 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$,

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{a}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ 2x_1+2y_1=0,\end{cases}$ 取 $z_1=1$,则 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$. ……………………………… 10 分

设平面 C_1CB 的一个法向量为 $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$,

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{b}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{b}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ -2x_2+2y_2=0,\end{cases}$ 取 $z_2=1$,则 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$. ……………………………… 11 分

设平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角为 α,

则 $\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{|3-3+1|}{\sqrt{3+3+1}\times\sqrt{3+3+1}}=\frac{1}{7}$.

故平面 A_1AB 与平面 C_1CB 夹角的余弦值为 $\frac{1}{7}$. …………………………………………………… 12 分

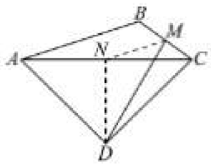
20.解:(1)在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\frac{2\pi}{3}=4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7.$ …………………… 2分

取AC中点N,连接DN,MN.

$\because AD=CD$,$AD\perp CD$,N为AC的中点,

$\therefore DN\perp AC$,$DN=\frac{1}{2}AC.$ …………………… 4分

则$\triangle ACD$的面积$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times AC\times DN=\frac{1}{4}AC^2=\frac{7}{4}.$ …………………… 5分



(2)设$\angle ABC=\alpha$,$\angle BAC=\beta$.

$\because M$,N分别为边BC,AC的中点,

$\therefore MN\parallel AB$,$MN=\frac{1}{2}AB=1$,$\angle MNC=\angle BAC=\beta.$ …………………… 6分

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha=5-4\cos\alpha.$ …………………… 7分

由正弦定理$\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin\beta}$,

得$\sin\beta=\frac{BC\cdot\sin\alpha}{AC}=\frac{\sin\alpha}{AC}.$ …………………… 8分

在$\triangle MDN$中,$\cos\angle MND=\cos(\angle MNC+\angle CND)=\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\beta$,

由余弦定理,得$DM^2=MN^2+DN^2-2MN\cdot DN\cdot\cos\angle MND$

$=1+\frac{1}{4}AC^2+2\times1\times\frac{1}{2}AC\times\sin\beta$

$=1+\frac{1}{4}\times(5-4\cos\alpha)+2\times1\times\frac{1}{2}AC\times\frac{\sin\alpha}{AC}$

$=\frac{9}{4}-\cos\alpha+\sin\alpha$, …………………… 9分

$=\frac{9}{4}+\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$,其中$0<\alpha<\pi$,

当$\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即$\alpha=\frac{3}{4}\pi$时,$DM$有最大值:

$\sqrt{\frac{9}{4}+\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}+1}{4}}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}+1}{2}.$

$\therefore DM$长度的最大值为$\frac{2\sqrt{2}+1}{2}.$ …………………… 12分

21.(1)证明:$f(x)=x(a\ln x-x-1)=ax\ln x-x^2-x$的定义域为$(0,+\infty)$,

当$a=1$时,$f'(x)=\ln x-2x$,…………………… 1分

设 $g(x)=\ln x-2x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}$.

由 $g(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-1=-\ln 2-1<0$，…………………………………… 3 分

$\therefore g(x)<0$，即 $f'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. …………………………………… 4 分

(2)(ⅰ)解：由题意知 $a\neq 0$，由 $f(x)+x=0$，得 $ax\ln x-x^2=0\Rightarrow a\ln x=x\Rightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{a}$，

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

由 $h'(x)=0$，得 $x=e$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减，

$\therefore h(x)$ 有极大值，也是最大值，$h(e)=\frac{1}{e}$. …………………………………… 6 分

又当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)>0$，$h(x)\to 0$，

所以要使 $f(x)+x=0$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2，则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{e}$，

即 $a>e$，即实数 a 的取值范围为 $(e,+\infty)$. …………………………………… 8 分

(ⅱ)证明：由(ⅰ)不妨设 $x_1>e>x_2>0$，

由 $f(x_1)+x_1=0$，$f(x_2)+x_2=0$，得 $x_1=a\ln x_1$，$x_2=a\ln x_2$，

则 $x_1-x_2=a(\ln x_1-\ln x_2)$，

要证 $x_1\cdot x_2>e^2$，即证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，等价于 $\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{a}>2$，

而 $\frac{1}{a}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，等价于证明 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$，

即证 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$.

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，$t>1$，

要证 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$，即证 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，…………………………………… 10 分

令 $\varphi(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，

则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0(t>1)$，

所以函数 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，…………………………………………………… 11 分

所以 $\varphi(t)>\varphi(1)=0$，即 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$，

所以 $x_1\cdot x_2>e^2$.……………………………………………………………………………………………… 12 分

22.解：(1)由 $\begin{cases}x=5\sin\alpha,\\y=3\cos\alpha,\end{cases}$ 消去 α 得 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，

所以曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. ……………………………………………………………… 2 分

(2)直线 l 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{3}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$，故其直角坐标方程为 $x-y+3=0$，显然点 $P(-1,2)$ 在直线 l 上，

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}$ ………………………………………………………………… 5 分

把 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}$ 代入 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，整理得 $17t^2+41\sqrt{2}t-116=0$，…………………………… 7 分

设点 A，点 B 对应的参数分别为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=-\frac{41\sqrt{2}}{17}$，$t_1t_2=-\frac{116}{17}<0$，

所以 $||PA|-|PB||=||t_1|-|t_2||=|t_1+t_2|=\frac{41\sqrt{2}}{17}$. …………………………………… 10 分

23.解：当 $x\leqslant1$ 时，不等式可化为：$3-2x\leqslant5\Rightarrow x\in[-1,1]$，…………………………………… 1 分

当 $1<x<2$ 时，不等式可化为 $1\leqslant5\Rightarrow x\in(1,2)$，…………………………………… 2 分

当 $x\geqslant2$ 时，不等式可化为 $2x-3\leqslant5\Rightarrow x\in[2,4]$，…………………………………… 3 分

综上，$|x-1|+|x-2|\leqslant5$ 的解集为 $[-1,4]$. …………………………………… 5 分

(2)证明：$\because a+b+c=1$，$a,b,c\in\mathbf{R}^+$，

$\therefore\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{c+a}-1\right)=\frac{c}{a+b}\times\frac{a}{b+c}\times\frac{b}{c+a}$. …………………………………… 7 分

故 $\frac{c}{a+b}\times\frac{a}{b+c}\times\frac{b}{c+a}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}\times\frac{a}{2\sqrt{bc}}\times\frac{b}{2\sqrt{ca}}=\frac{1}{8}$. …………………………………… 9 分

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，取等号. …………………………………… 10 分

关于我们