



1号卷·A10联盟2024

数学

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部

第I卷 选择题(共60分)

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

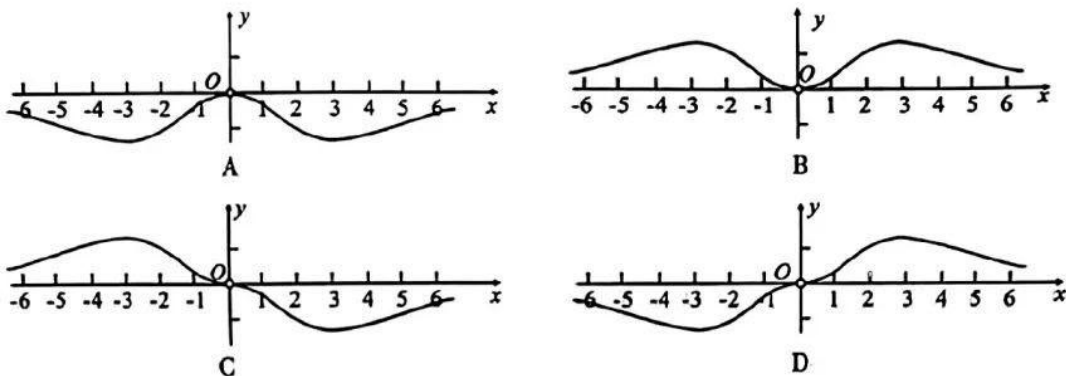
1. $\frac{i^{2023}}{2-5i}$ 的虚部为 ()

- A. $-\frac{5}{29}$ B. $\frac{5}{29}$ C. $-\frac{2}{29}$ D. $\frac{2}{29}$

2. 已知集合 $M = \left\{ x \mid x = \frac{k+2}{3}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, $N = \left\{ x \mid x = k + \frac{2}{3}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 则 ()

- A. $M \cap N = M$ B. $M \cup N = M$ C. $M \cap N = \emptyset$ D. $M = N$

3. 函数 $f(x) = \frac{x^3}{e^{-x} - e^x}$ 的部分图象大致为 ()



4. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 是线段 BC 上靠近 B 的三等分点, 点 N 是线段 AC 的中点, 则 $\overrightarrow{AM} =$ ()

- A. $-\overrightarrow{BN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ B. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ C. $-\overrightarrow{BN} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$ D. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 若角 α 的终边过点 $P(4, -3)$, 则 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) + \cos(\pi - 2\alpha) =$ ()

- A. $-\frac{14}{25}$ B. $\frac{14}{25}$ C. $-\frac{17}{25}$ D. $\frac{17}{25}$

6. 已知各项均不为0的数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2$, $2^{n+1}a_n - 2^n a_{n+1} = 3a_n a_{n+1}$, 则 $a_6 =$ ()

届高三上学期11月段考

试题

分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

- A. 2 B. 4 C. $\frac{64}{19}$ D. $\frac{64}{13}$
7. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $F(x)$ 满足: $F(1)=0$, 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 时, $F'(x) < 0$. 若 $f(x) = xF(x)$, 则下列说法错误的是 ()
- A. $f'(1) < 0$ B. $f(2) < 0$
C. $\forall x \in (1, 3), f'(x) < 0$ D. $\forall x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), f(x) > 0$ 且 $f'(x) > 0$
8. 已知正三棱锥 $S-ABC$ 底面边长为1, 侧棱长为2, 过棱 SA 的中点 D 作与该棱垂直的截面分别交 SB, SC 于点 E, F , 则截面 DEF 的面积为 ()
- A. $\frac{\sqrt{11}}{49}$ B. $\frac{2\sqrt{11}}{49}$ C. $\frac{3\sqrt{11}}{49}$ D. $\frac{\sqrt{11}}{7}$
- 二、选择题 (本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.)
9. 若函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 3)$ 中心对称, 则 $f(x)$ 的解析式可以是 ()
- A. $f(x) = \sin \pi x + 3$ B. $f(x) = \frac{3x-7}{x-2}$
C. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 19$ D. $f(x) = \lg(\sqrt{1+x^2} - x) + 3$
10. 已知单位向量 a, b 的夹角为 θ , 则 ()
- A. $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |a+b|$ B. $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |a-b|$
C. 若 $|a+b|^2 = 1$, 则 $\theta = \frac{5\pi}{6}$ D. 若 $|a+b|^2 = 1$, 则 $\theta = \frac{2\pi}{3}$
11. 设 $b_i > 1 (i=1, 2, \dots, 101)$, $\ln b_1, \ln b_2, \dots, \ln b_{101}$ 是公差为 $\ln 2$ 的等差数列, a_1, a_2, \dots, a_{101} 为等差数列, $a_1 = b_1, a_{51} = b_{51}, m = b_1 + b_2 + \dots + b_{51}, n = a_1 + a_2 + \dots + a_{51}$, 则 ()
- A. $m > n$ B. $m < n$ C. $a_{101} > b_{101}$ D. $a_{101} < b_{101}$
12. 已知函数 $f(x) = |x^2 - (\lambda - 2)x + 1|$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上无极值点, 则实数 λ 的值可能是 ()
- A. -1 B. 1 C. 2 D. 4

第 II 卷 非选择题(共 90 分)

三、填空题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 已知函数 $f(x) = \ln x + x$, 过原点作曲线 $y = f(x)$ 的切线 l , 则切线 l 的斜率为_____.
14. 已知向量 a, b 满足 $a \cdot b = -2$, $|a| = 4$, b 在 a 方向上的投影向量为 c , 则 $c =$ _____ a . (用数字作答)
15. 已知某圆锥的高为 $\sqrt{2} \text{ cm}$, 体积为 $2\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$, 则经过该圆锥的两条母线的截面面积的最大值为_____ cm^2 .
16. 当异物卡在气管内迫使人咳嗽时, 膈肌向上推动, 导致肺部压力增加, 与此同时, 气管收缩, 导致排出物移动更快, 并增加异物的压力. 已知咳嗽的数学模型 $v(r) = \log_4 r + \log_2 \frac{12}{2+3r}$ ($\frac{1}{2} \leq r \leq 1$), 其中 v (厘米/秒) 表示通过人的气管的气流速度, r (厘米) 表示气管半径, 则咳嗽的气流最大速度约为_____厘米/秒. (结果精确到 0.1, 参考数据: $\log_2 3 \approx 1.585$).

四、解答题(本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 5m + 5)x^{m^2 - 2m}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 函数 $g(x) = 2^x - k$

- (1) 求 m 的值;
- (2) 记集合 $A = \{y | y = f(x), x \in [1, 2]\}$, 集合 $B = \{y | y = g(x), x \in [-1, 1]\}$, 若 $A \cap B = A$, 求实数 k 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知 M, N 分别为函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 图象上相邻的最高点和最低点, $MN = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 4}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, $g(x)$ 为奇函数.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 当 $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, 0\right]$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) - m = 0$ 有两个不同的实数解, 求实数 m 的取值范围.

第Ⅱ卷 非选择题(共90分)

三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. 已知函数 $f(x) = \ln x + x$, 过原点作曲线 $y = f(x)$ 的切线 l , 则切线 l 的斜率为_____.
14. 已知向量 a, b 满足 $a \cdot b = -2$, $|a| = 4$, b 在 a 方向上的投影向量为 c , 则 $c =$ _____ a . (用数字作答)
15. 已知某圆锥的高为 $\sqrt{2}$ cm, 体积为 $2\sqrt{2}\pi$ cm³, 则经过该圆锥的两条母线的截面面积的最大值为_____ cm².
16. 当异物卡在气管内迫使人咳嗽时, 膈肌向上推动, 导致肺部压力增加, 与此同时, 气管收缩, 导致排出物移动更快, 并增加异物的压力. 已知咳嗽的数学模型 $v(r) = \log_4 r + \log_2 \frac{12}{2+3r}$ ($\frac{1}{2} \leq r \leq 1$), 其中 v (厘米/秒) 表示通过人的气管的气流速度, r (厘米) 表示气管半径, 则咳嗽的气流最大速度约为_____厘米/秒. (结果精确到0.1, 参考数据: $\log_2 3 \approx 1.585$)

四、解答题(本题共6小题,共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分10分)

已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 5m + 5)x^{m^2 - 2m}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 函数 $g(x) = 2^x - k$

- (1) 求 m 的值;
- (2) 记集合 $A = \{y | y = f(x), x \in [1, 2]\}$, 集合 $B = \{y | y = g(x), x \in [-1, 1]\}$, 若 $A \cap B = A$, 求实数 k 的取值范围.

18. (本小题满分12分)

已知 M, N 分别为函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 图象上相邻的最高点和最低点, $MN = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 4}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, $g(x)$ 为奇函数.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 当 $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, 0\right]$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) - m = 0$ 有两个不同的实数解, 求实数 m 的取值范围.

1号卷·A10联盟2024届高三上学期11月段考 数学参考答案

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	D	A	B	D	B

1. C 由题意得, $\frac{i^{2023}}{2-5i} = \frac{-i(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{5}{29} - \frac{2}{29}i$, 故所求虚部为 $-\frac{2}{29}$, 故选 C.

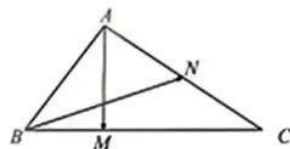
2. B 由题意得, $N = \left\{ x \mid x = \frac{3k+2}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, 故 $N \subsetneq M$, 则 $M \cup N = M$, 故选 B.

3. A 由题意得, $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$, 且 $f(-x) = \frac{(-x)^3}{e^x - e^{-x}} = \frac{x^3}{e^{-x} - e^x} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 排除 CD; 又 $f(1) = \frac{1}{e^{-1} - e} < 0$, 排除 B. 故选 A.

4. D 作出图形如图, 则 $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} =$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \text{ 故选 D.}$$



5. A 由题意得, $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) + \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha - \cos 2\alpha = -2\cos 2\alpha =$
 $-2(1 - 2\sin^2 \alpha) = -2 \times \left[1 - 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^2\right] = -\frac{14}{25}$. 故选 A.

6. B $\because 2^{n+1}a_n - 2^n a_{n+1} = 3a_n a_{n+1}$, $\therefore \frac{2^{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{2^n}{a_n} = 3$, 又 $\frac{2^1}{a_1} = \frac{2}{2} = 1$, $\therefore \left\{\frac{2^n}{a_n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 3 的等差数列, $\therefore \frac{2^n}{a_n} = 1 + 3(n-1) = 3n-2$, $\therefore a_n = \frac{2^n}{3n-2}$, $\therefore a_6 = \frac{2^6}{3 \times 6 - 2} = 4$, 故选 B.

7. D 由题意得, $f'(x) = F(x) + xF'(x)$, $\therefore f'(1) = F(1) + F'(1)$, $\therefore f'(1) = F'(1) < 0$, 故 A 的说法正确; $f(2) = 2F(2)$, $\because x \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 时, $F'(x) < 0$, $\therefore F(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 上单调递减, 又 $F(1) = 0$, $\therefore F(2) < 0$, $\therefore f(2) < 0$, 故 B 的说法正确; $\because f'(x) = F(x) + xF'(x)$, $\forall x \in (1, 3)$, $F(x) < 0$, $F'(x) < 0$, $\therefore \forall x \in (1, 3)$, $f'(x) < 0$, 故 C 的说法正确; $\because F(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 上单调递减, 又 $F(1) = 0$, $\therefore \forall x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $F(x) > 0$, $\therefore f(x) = xF(x) > 0$, $\because \forall x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $F'(x) < 0$, $\therefore f'(x) = F(x) + xF'(x)$ 的正负性无法判断, 故 D 的说法错误. 故选 D.

8. B 由题易知, $DE \perp SA, DF \perp SA$, 在 $\triangle SAB$ 中, 由余弦定理得, $\cos \angle ASB = \frac{4+4-1}{8} = \frac{7}{8}$,
 $\therefore \tan \angle ASB = \frac{\sqrt{15}}{7}, DE = \frac{\sqrt{15}}{7}, SE = \frac{SD}{\cos \angle ASB} = \frac{1}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{7}$, 同理, $SF = SE = \frac{8}{7}, \therefore EF \parallel BC$,
 $\therefore \frac{SE}{SB} = \frac{EF}{BC}, \therefore \frac{\frac{8}{7}}{2} = \frac{EF}{1}, \therefore EF = \frac{4}{7}$. 过 D 作 $DH \perp EF$ 于点 H , 则
 $DH = \sqrt{DE^2 - EH^2} = \frac{\sqrt{11}}{7}, \therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times EF \times DH = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{\sqrt{11}}{7} = \frac{2\sqrt{11}}{49}$, 故选 B.

二、选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

题号	9	10	11	12
答案	ABC	ABD	BD	BD

9. ABC 对 A, $y = \sin \pi x$ 关于 $(2, 0)$ 中心对称, 故 $f(x) = \sin \pi x + 3$ 关于点 $(2, 3)$ 中心对称, 故 A 正确; 对 B, $f(x) = \frac{3x-7}{x-2} = 3 - \frac{1}{x-2}$, 故 $f(x) = \frac{3x-7}{x-2}$ 关于点 $(2, 3)$ 中心对称, 故 B 正确; 对 C, 因为 $f(x) + f(4-x) = 6$, 所以 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 19$ 关于点 $(2, 3)$ 中心对称, 故 C 正确; 对 D, 易得 $f(0) = 3, f(4) = \lg(\sqrt{17}-4) + 3$, 不满足 $f(0) + f(4) = 6$, 故 D 错误. 故选 ABC.
10. ABD 由题意得, $\theta \in [0, \pi], \therefore \sin \frac{\theta}{2} \geq 0, \cos \frac{\theta}{2} \geq 0, \therefore (a+b)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = 1+1+2 \times 1 \times 1 \times \cos \theta = 2+2 \cos \theta = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \therefore \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |a+b|$, 故 A 正确; $\therefore (a-b)^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b = 1+1-2 \times 1 \times 1 \times \cos \theta = 2-2 \cos \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \therefore \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |a-b|$, 故 B 正确;
 若 $|a+b|^2 = 1$, 则 $|a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = 2+2a \cdot b = 1, \therefore a \cdot b = -\frac{1}{2}, \therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}, \therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$,
 故 C 错误, D 正确. 故选 ABD.
11. BD 方法一: 由题意得, b_1, b_2, \dots, b_{101} 为公比为 2 的等比数列, $\therefore b_1 = 2^0 b_1, b_2 = 2^1 b_1, b_3 = 2^2 b_1, \dots, b_{101} = 2^{100} b_1$. 又 a_1, a_2, \dots, a_{101} 为等差数列, $a_1 = b_1, a_{51} = b_{51}, \therefore a_1 + 50d = 2^{50} b_1 = 2^{50} a_1$,
 $\therefore m = b_1 + b_2 + \dots + b_{51} = b_1 \frac{(2^{51}-1)}{2-1} = 2^{51} a_1 - a_1 < 2^{51} a_1, n = a_1 + a_2 + \dots + a_{51} = \frac{51}{2} [a_1 + (a_1 + 50d)] = \frac{51}{2} (a_1 + 2^{50} a_1) = \frac{51}{2} a_1 + \frac{51}{2} 2^{50} a_1 > 2^{51} a_1, \therefore m < n. \therefore a_{101} = a_1 + 100d, b_{101} = 2^{100} b_1$,
 $\therefore a_{101} = a_1 + 100 \left(\frac{2^{50} a_1 - a_1}{50} \right), b_{101} = 2^{100} a_1, \therefore a_{101} = a_1 + 2^{51} a_1 - 2a_1 = 2^{51} a_1 - a_1 < 2^{51} a_1$,
 $b_{101} > 2^{51} a_1, b_{101} > a_{101}$, 故选 BD.
 方法二: 结合等差、等比数列函数的单调性也可解答.
12. BD 方法一: 设 $h(x) = x^2 - (\lambda - 2)x + 1$. 要使 $f(x)$ 在无极值点, 即 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上单调, 只

$$\text{需要 } \begin{cases} \frac{\lambda-2}{2} \geq \frac{1}{2} \\ h\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{\lambda-2}{2} \geq \frac{1}{2} \\ h\left(-\frac{1}{2}\right) \leq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{\lambda-2}{2} \leq -\frac{1}{2} \\ h\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{\lambda-2}{2} \leq -\frac{1}{2} \\ h\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } 3 \leq \lambda \leq \frac{9}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1, \text{ 所以实数 } \lambda \text{ 的取值范围 } \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[3, \frac{9}{2}\right]. \text{ 故选 BD.}$$

方法二：用区间没有零点也可解答。

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。）

13. $\frac{1}{e}+1$

由题意得， $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ ，设切点为 $P(x_0, \ln x_0 + x_0)$ ，则切线方程为 $y = \left(\frac{1}{x_0} + 1\right)(x - x_0) + \ln x_0 + x_0$ 。

因为切线过原点，所以 $0 = \left(\frac{1}{x_0} + 1\right)(-x_0) + \ln x_0 + x_0 = \ln x_0 - 1$ ，解得 $x_0 = e$ ，所以 $f'(x_0) = f'(e) = \frac{1}{e} + 1$ 。

14. $-\frac{1}{8}$

由投影向量定义知， b 在 a 方向上的投影向量 $c = \frac{a \cdot b}{|a|} \cdot \frac{a}{|a|} = \frac{a \cdot b}{|a|^2} \cdot a = \frac{-2}{16} a = -\frac{1}{8} a$ 。

15. 4

设该圆锥的底面半径和母线长分别为 r, l ，则 $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi$ ，解得 $r = \sqrt{6}$ 。

$\therefore l = \sqrt{r^2 + h^2} = 2\sqrt{2}$ (cm)。设 SA, SB 为圆锥的两条母线，当 AB 为底面直径时，

$$\cos \angle ASB = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6})^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}, \therefore \text{当 } \angle ASB = \frac{\pi}{2} \text{ 时，经过该圆锥的两条母线的截面}$$

面积最大，为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ 。

16. 1.3

$$\text{由题意得，} v(r) = \log_4 r + \log_2 \frac{12}{2+3r} = \log_2 \sqrt{r} + \log_2 \frac{12}{2+3r} = \log_2 \frac{12\sqrt{r}}{2+3r} = \log_2 \frac{12}{\frac{2}{\sqrt{r}} + 3\sqrt{r}} \leq$$

$$\log_2 \frac{12}{2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{r}} \cdot 3\sqrt{r}}} = \log_2 \sqrt{6} = \frac{1}{2}(1 + \log_2 3) = \frac{1}{2} \times (1 + 1.585) \approx 1.3, \text{ 当且仅当 } \frac{2}{\sqrt{r}} = 3\sqrt{r}, \text{ 即 } r = \frac{2}{3}$$

时取等号，即咳嗽的气流最大速度约为 1.3 厘米/秒。

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

17.（本小题满分 10 分）

(1) 由题意得， $m^2 - 5m + 5 = 1$ ，解得 $m = 1$ 或 $m = 4$ 。.....2 分

当 $m = 1$ 时， $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ ，满足题意；.....3 分

当 $m = 4$ 时， $f(x) = x^8$ ，此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，不满足题意。.....4 分

综上， $m = 1$ 。.....5 分

(2) 由(1)知, $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $A = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$6分

$\because g(x) = 2^x - k$, $\therefore B = \left[\frac{1}{2} - k, 2 - k\right]$7分

$\because A \cap B = A$, $\therefore A \subseteq B$, $\therefore \begin{cases} \frac{1}{2} - k \leq \frac{1}{2} \\ 2 - k \geq 1 \end{cases}$,9分

解得 $0 \leq k \leq 1$, 即实数 k 的取值范围为 $[0, 1]$10分

18. (本小题满分 12 分)

(1) 由题意得, $MN = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 + (2A)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 4}$,1分

则 $\omega = 2, A = 1$, $\therefore f(x) = \cos(2x + \varphi)$,2分

$\therefore g(x) = \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$,3分

$\because g(x)$ 为奇函数, $\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,4分

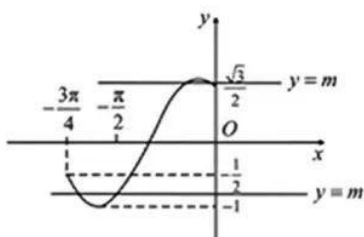
$\because 0 < \varphi < \pi$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$, $\therefore f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$5分

(2) $\because -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq 0$, $\therefore -\frac{4\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}$.

作出函数 $f(x)$ 在 $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, 0\right]$ 上的图象和直线 $y = m$,8分

由图知, 当 $m \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, 0\right]$ 上的图象和直线 $y = m$ 有两个不同的交点, 即关于 x 的方程 $f(x) - m = 0$ 有两个不同的实数解,9分

综上, 实数 m 的取值范围是 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$12分



19. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 连接 $BD, A'F, FC$.

$\because BC = CD = \sqrt{2}$, $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$, $\therefore BD = 2$,

$\because AB = AE = DE = 2$, $\angle BAE = \frac{\pi}{2}$, \therefore 四边形 $ABDE$ 是正方形,

$\because F$ 为 AE 的中点, $\therefore CF \perp AE$1分

由题意得, $EE' \perp$ 平面 $ABCDE$, $\therefore EE' \perp CF$,2分
 $\because AE \cap EE' = E$, $\therefore CF \perp$ 平面 $AEE'A'$, $\therefore CF \perp E'F$3分
 $\because A'B' \parallel AB \parallel CF$, $\therefore A', B', C, F$ 四点共面.4分
 $\because A'F = E'F = \sqrt{2}$, $A'E' = 2$, $\therefore A'F^2 + E'F^2 = A'E'^2$, $\therefore A'F \perp E'F$,5分
 $\because CF \cap A'F = F$, $\therefore E'F \perp$ 平面 $A'B'CF$, $\therefore B'C \perp E'F$6分

(2) 如图, 分别以 EA, ED, EE' 为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $E(0, 0, 0), F(1, 0, 0), E'(0, 0, 1), B'(2, 2, 1), C(1, 3, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{E'B'} = (2, 2, 0), \overrightarrow{E'F} = (1, 0, -1), \overrightarrow{FC} = (0, 3, 0)$7分

设平面 $B'E'F$ 的法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$, 由 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{E'B'} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{E'F} = 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} 2x_1 + 2y_1 = 0 \\ x_1 - z_1 = 0 \end{cases}$,

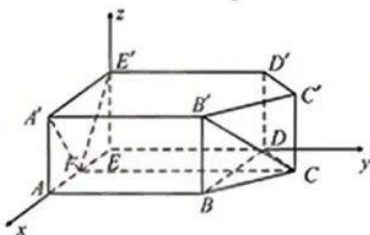
令 $x_1 = 1$, 得 $y_1 = -1, z_1 = 1$, $\therefore m = (1, -1, 1)$9分

设平面 $CE'F$ 的法向量为 $n = (x_2, y_2, z_2)$, 由 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{E'F} = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{FC} = 0 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x_2 - z_2 = 0 \\ 3y_2 = 0 \end{cases}$,

令 $x_2 = 1$, 得 $y_2 = 0, z_2 = 1$, $\therefore n = (1, 0, 1)$,11分

$\therefore \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m||n|} = \frac{1 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times 1}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

\therefore 平面 $B'E'F$ 与平面 $CE'F$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$12分



20. (本小题满分 12 分)

(1) 由题意得, $\angle BCD = \frac{\pi}{2}, \angle ABC = \frac{3\pi}{4}$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B} = \sqrt{10}$2分

由余弦定理得, $\cos \angle ACB = \frac{4+10-2}{2 \times 2 \times \sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$,3分

$\because \angle ACB + \angle ACD = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \cos \angle ACB = \sin \angle ACD = \frac{3}{\sqrt{10}}$,4分

$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD \cdot \sin \angle ACD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot CD \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$, 故 $CD = \sqrt{14}$,5分

$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times 2 = \sqrt{14}$6分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得, $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$, $\therefore AC = \frac{1}{\sin \angle ACB}$8分

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得, $\frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$, $\therefore AC = \frac{\sqrt{2}}{\sin \angle ACD}$10分

$\because \angle ACB + \angle ACD = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \cos \angle ACD = \sin \angle ACB$,

$\therefore \frac{1}{\cos \angle ACD} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \angle ACD}$, $\therefore \sin \angle ACD = \sqrt{2} \cos \angle ACD > 0$,11分

又 $\sin^2 \angle ACD + \cos^2 \angle ACD = 1$, 解得 $\cos \angle ACD = \frac{\sqrt{3}}{3}$12分

21. (本小题满分 12 分)

(1) 记等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_9 = a_1 + 8d = 17 \\ S_{10} = 10a_1 + 45d = 100 \end{cases}$1分

解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$2分

故 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$3分

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = n^2$4分

(2) 由 $b_{n+1} = T_n + 2$, 得 $b_{n+2} = T_{n+1} + 2$, 相减得 $b_{n+2} = 2b_{n+1}$5分

又 $b_2 = b_1 + 2 = 4 = 2b_1$, 故 $b_{n+1} = 2b_n$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立, 故 $b_n = 2^n$,

则 $\lambda^2 - 2 \leq \lambda \cdot \frac{n^2 - 1}{2^n}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立.6分

① 当 $\lambda = 0$ 时, $-2 \leq 0$ 成立, 所以 $\lambda = 0$ 符合题意;7分

② 当 $\lambda > 0$ 时, 由 $\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda} \leq \frac{n^2 - 1}{2^n}$ 恒成立, 得 $\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda} \leq \left(\frac{n^2 - 1}{2^n}\right)_{\min}$.

易知当 $n=1$ 时, $\frac{n^2 - 1}{2^n} = 0$; 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{n^2 - 1}{2^n} > 0$, 故 $\left(\frac{n^2 - 1}{2^n}\right)_{\min} = 0$.

由 $\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda} \leq 0$ 和 $\lambda > 0$, 得 $0 < \lambda \leq \sqrt{2}$;9分

③ 当 $\lambda < 0$ 时, 由 $\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda} \geq \frac{n^2 - 1}{2^n}$ 恒成立, 得 $\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda} \geq \left(\frac{n^2 - 1}{2^n}\right)_{\max}$.

由 $\frac{(n+1)^2 - 1}{2^{n+1}} - \frac{n^2 - 1}{2^n} = \frac{-n^2 + 2n + 2}{2^{n+1}}$, 得当 $n=1, 2$ 时, $\frac{(n+1)^2 - 1}{2^{n+1}} > \frac{n^2 - 1}{2^n}$; 当 $n \geq 3$ 时,

$\frac{(n+1)^2 - 1}{2^{n+1}} < \frac{n^2 - 1}{2^n}$, 且 $\frac{2^2 - 1}{2^2} < \frac{3^2 - 1}{2^2}$, $\therefore \left(\frac{n^2 - 1}{2^n}\right)_{\max} = \frac{3^2 - 1}{2^2} = 1$.

由 $\frac{\lambda^2 - 2}{\lambda} \geq 1$ 和 $\lambda < 0$, 得 $-1 \leq \lambda < 0$;11分

综上所述, 实数 λ 的取值范围为 $[-1, \sqrt{2}]$12分

22. (本小题满分 12 分)

(1) $f'(x) = 2e^x + ae^{-x} + 2a + 1 = e^{-x} [2e^{2x} + (2a+1)e^x + a] = e^{-x} (e^x + a)(2e^x + 1)$1分

当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;2分

当 $a < 0$ 时, 令 $e^x + a = 0$, 可得 $x = \ln(-a)$3分

当 $x \in (-\infty, \ln(-a))$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-a))$ 上单调递减;
 当 $x \in (\ln(-a), +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\ln(-a), +\infty)$ 上单调递增.4 分

(2) 由 (1) 得, 要使函数 $f(x)$ 有两个零点,
 则 $a < 0$, 且 $f(x)_{\min} = f(\ln(-a)) = (2a+1)\ln(-a) - 2a - 2 < 0$5 分

令 $g(x) = (2x+1)\ln(-x) - 2x - 2 (x < 0)$, 则 $g'(x) = 2\ln(-x) + \frac{1}{x}$,
 令 $h(x) = g'(x) = 2\ln(-x) + \frac{1}{x} (x < 0)$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} (x < 0)$,
 $\therefore h(x)$ 即 $g'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.6 分

$\therefore g'(-1) = -1 < 0, g'(-2) = 2\ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 4 - \frac{1}{2} > 0$,
 $\therefore \exists x_0 \in (-2, -1)$, 使得 $g'(x_0) = 2\ln(-x_0) + \frac{1}{x_0} = 0$, 即 $\ln(-x_0) = -\frac{1}{2x_0}$7 分

且 $g(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 0)$ 上单调递减, 故只需 $g(x)_{\max} = g(x_0) < 0$8 分

即 $(2x_0+1)\ln(-x_0) - 2x_0 - 2 < 0 (x_0 < 0)$, 则 $(2x_0+1) \times \left(-\frac{1}{2x_0}\right) - 2x_0 - 2 < 0 (x_0 < 0)$,
 即 $4x_0^2 + 6x_0 + 1 < 0 (x_0 < 0)$,10 分

解得 $\frac{-3-\sqrt{5}}{4} < x_0 < \frac{-3+\sqrt{5}}{4}$,11 分

故当 $a \in \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{4}, \frac{-3+\sqrt{5}}{4}\right)$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点.12 分

以上各解答如有不同解法并且正确, 请按相应步骤给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

