# 无锡市2023年秋学期高三期中教学质量调研测试

## 数学

**命题单位：宜兴市教师发展中心　　制卷单位：无锡市教育科学研究院**

**注意事项及说明：本卷考试时间为120分钟.本卷满分为150分.**

**一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1．若全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，设集合$A=\{1,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则$A\cap(\complement_U B)=$

A．$\{1\}$　　B．$\{3\}$　　C．$\{1,3\}$　　D．$\{1,3,5\}$

【答案】A

【解析】$\complement_U B=\{1,5\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{1\}$，选A.

2．已知复数$z=2-\mathrm{i}$，则$z(\bar{z}+\mathrm{i})$的虚部为

A．$-2$　　B．$-1$　　C．$6$　　D．$2$

【答案】D

【解析】$z(\bar{z}+\mathrm{i})=(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i}+\mathrm{i})=(2-\mathrm{i})(2+2\mathrm{i})=4+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=6+2\mathrm{i}$，

虚部为2，选D.

3．预测人口的变化趋势有多种方法，“直接推算法”使用的是公式$P_n=P_0(1+k)^n(k>-1)$，其中$P_n$为预测期人口数，$P_0$为初期人口数，$k$为预测期内人口增长率，$n$为预测期间隔年数.如果在某一时期$k\in(-1,0)$，那么在这期间人口数

A．呈上升趋势　　B．呈下降趋势　　C．摆动变化　　D．不变

【答案】B

【解析】$-1<k<0$，$0<1+k<1$，$P_n=P_0(1+k)^n$，单调减，选B.

4．已知$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$，则$\cos\left(\theta+\dfrac{7\pi}{6}\right)=$

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$-\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】B

【解析】$\cos\left(\theta+\frac{7}{6}\pi\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}$，选 B.

5．当 $x=2$ 时，函数 $f(x)=x^3+bx^2-12x$ 取得极值，则 $f(x)$ 在区间 $[-4,4]$ 上的最大值为

A．8　　　　B．12　　　　C．16　　　　D．32

【答案】C

【解析】$f'(x)=3x^2+2bx-12$，$f(x)$ 在 $x=2$ 取极值，$f'(2)=12+4b-12=0$，$\therefore b=0$.

$f(x)=x^3-12x$，$f'(x)=0$，$x=\pm2$，$f(x)$ 在 $[-4,-2]\nearrow$，$[-2,2]\swarrow$，$[2,4]\nearrow$，

$f(-2)=-8+24=16$，$f(4)=64-48=16$，$f(x)_{\max}=16$，选 C.

6．把物体放在冷空气中冷却，如果物体原来的温度是 $\theta_1$℃，空气的温度是 $\theta_0$℃，那么 $t$ min 后物体的温度 $\theta$（单位：℃），可由公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$ 求得，其中 $k$ 是一个随着物体与空气的接触情况而定的常数.现有 60℃ 的物体，放在 15℃ 的空气中冷却，3 分钟以后物体的温度是 42℃.则 $k$ 的值为（精确到 0.01）

（参考数据：$\ln3\approx1.0986$，$\ln5\approx1.6094$）

A．0.51　　　　B．0.28　　　　C．0.17　　　　D．0.07

【答案】C

【解析】$42^\circ=15^\circ+(60^\circ-15^\circ)e^{-3k}$，$\therefore k=-\frac{1}{3}\ln\frac{3}{5}=-\frac{1}{3}(\ln3-\ln5)\approx0.17$，选 C.

7．记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 $T$，且 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，所得图象关于 $y$ 轴对称，则 $\omega$ 的最小值为

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．5

【答案】D

【解析】$T=\frac{2\pi}{\omega}$，$f(T)=\sin\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$.

$f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\sin\left(\omega x+\varphi-\frac{\omega}{6}\pi\right)$ 为偶函数，

$\therefore \varphi-\frac{\pi}{6}\omega=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$\omega=-3+\frac{6\varphi}{\pi}-6k=-1-6k$，$k=-1$ 时，$\omega_{\min}=5$.

8．设函数 $f(x)=x+\ln x$，$g(x)=x\ln x-1$，$h(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点分别为 $a,b,c$，则 $a,b,c$ 的大小顺序为

A．$c>b>a$　　B．$b>c>a$　　C．$c>a>b$　　D．$b>a>c$

【答案】B

【解析】$f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)\nearrow$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln 2<0$，$f(1)=1>0$，

$\therefore a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$g'(x)=\ln x+1=0$，$x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\swarrow$，$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)\nearrow$，

$g(1)=-1<0$，$g(2)=2\ln 2-1>0$，$\therefore b\in(1,2)$，

$h'(x)=\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)\nearrow$，$h\left(\frac{1}{2}\right)<0$，$h(1)>0$，$\therefore c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

$b$ 最大，$f\left(\frac{5}{8}\right)=\ln\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=\ln 5-3\ln 2+\frac{5}{8}\approx 1.6-3\times 0.7+\frac{5}{8}=-0.5+\frac{5}{8}>0$，

$\therefore a\in\left(\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right)$，$h\left(\frac{5}{8}\right)=1-\frac{8}{5}+\frac{5}{16}+\frac{\frac{25}{64}}{3}<0$，$\therefore c\in\left(\frac{5}{8},1\right)$，$\therefore a<c<b$，选 B.

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9．平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是夹角为 $60^\circ$ 的单位向量，向量 $\boldsymbol{c}$ 的模为 $2\sqrt{3}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的值有可能为

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【答案】ABC

【解析】设 $\vec{a}=(1,0)$，$B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C(2\sqrt{3}\cos\theta,2\sqrt{3}\sin\theta)$，

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\cos\theta,\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}\sin\theta\right)$，

$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{15+12\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}\in[\sqrt{3},3\sqrt{3}]$，选 ABC.

10．已知$a>0$，$b>0$，$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1$.则下列说法正确的是

A．$ab$的最小值为12

B．$a+b$的最小值为$4\sqrt{3}$

C．$a^2+b^2$的最小值为24

D．$\frac{1}{a-1}+\frac{3}{b-3}$的最小值为2

【答案】AD

【解析】$1=\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{ab}}$，$\therefore ab\geq 12$，A对.

$a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\right)=1+\frac{3a}{b}+\frac{b}{a}+3\geq 4+2\sqrt{3}$，B错.

$\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1$，$\therefore a=\frac{b}{b-3}$，$a^2+b^2=\left(\frac{b}{b-3}\right)^2+b^2$，

$f(x)=\left(\frac{x}{x-3}\right)^2+x^2$，$x>3$，$f'(x)=2x\left(1-\frac{3}{(x-3)^3}\right)=0$，$x=3+3^{\frac{1}{3}}$，

$f(x)$在$\left(3,3+3^{\frac{1}{3}}\right)\swarrow$，$\left(3+3^{\frac{1}{3}},+\infty\right)\nearrow$，$f(x)_{\min}=f\left(3+3^{\frac{1}{3}}\right)\neq 24$，C错.

$\frac{1}{a-1}+\frac{3}{b-3}=\frac{1}{\frac{b}{b-3}-1}+\frac{3}{b-3}=\frac{b-3}{3}+\frac{3}{b-3}\geq 2$，D对，选AD.

11．已知函数$f(x)=\sin x+\frac{1}{|\sin x|}$，则

A．$f(x)$的最小正周期为$\pi$

B．$f(x)$的最小值为0

C．$y=f(x)$的图象关于点$(\pi,1)$对称

D．$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称

【答案】BD

【解析】$f(x+\pi)=\sin(x+\pi)+\dfrac{1}{|\sin(x+\pi)|}=-\sin x+\dfrac{1}{|\sin x|}\neq f(x)$，$T$不是$f(x)$的周期，A错.

$\sin x\geq -1$，$\dfrac{1}{|\sin x|}\geq 1$，$\sin x+\dfrac{1}{|\sin x|}\geq 0$，当$\sin x=-1$时取“=”，B对.

$f(2\pi-x)=\sin(2\pi-x)+\dfrac{1}{|\sin(2\pi-x)|}=-\sin x+\dfrac{1}{|\sin x|}$，

$f(2\pi-x)+f(x)=\dfrac{2}{|\sin x|}\neq 2$，C错.

$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)+\dfrac{1}{|\sin(\pi-x)|}=\sin x+\dfrac{1}{|\sin x|}=f(x)$，D对，选BD.

12．已知函数$f(x)$定义域为$\mathbf{R}$，满足$f(x+1)=\dfrac{1}{2}f(x)$，当$x\in(0,1]$时，$f(x)=-4x(x-1)$.

则下列结论正确的是

A．$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=4$

B．方程$f(x)=\dfrac{1}{3}x$共有三个不同实根

C．$\sum\limits_{i=1}^{2n}f\left(\dfrac{i}{2}\right)=2-\dfrac{2}{2^n}$

D．使不等式$f(x)\geq\dfrac{3}{8}$成立的$x$的最大值是$\dfrac{7}{4}$

【答案】ACD

【解析】方法一：

$f(x)=2f(x+1)$，$f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=2f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4\left(-4\times\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)=4$，A对.

$0\le x\le 1$时，$f(x)=\frac{1}{3}x$有两个根$0,\frac{11}{12}$，$0<x<2$时，$f(x)=\frac{1}{3}x$即$-2(x-1)(x-2)=\frac{1}{3}x$

有两个根，共4个根，B错.

$\frac{f\left(\frac{n}{2}\right)}{f\left(\frac{n-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$\left\{f\left(\frac{n}{2}\right)\right\}$是以1为首项$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，

$\therefore\sum_{i=1}^{2n}f\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=2-\frac{2}{2^n}$，C对.

$1\le x\le 2$，$f(x)=-2(x-1)(x-2)=\frac{3}{8}$，则$x=\frac{5}{4}$或$\frac{7}{4}$，$x>3$时，$f(x)\le\frac{1}{4}$.

$\therefore f(x)\ge\frac{3}{8}$成立的$x$的最大值为$\frac{7}{4}$，D对，选ACD.

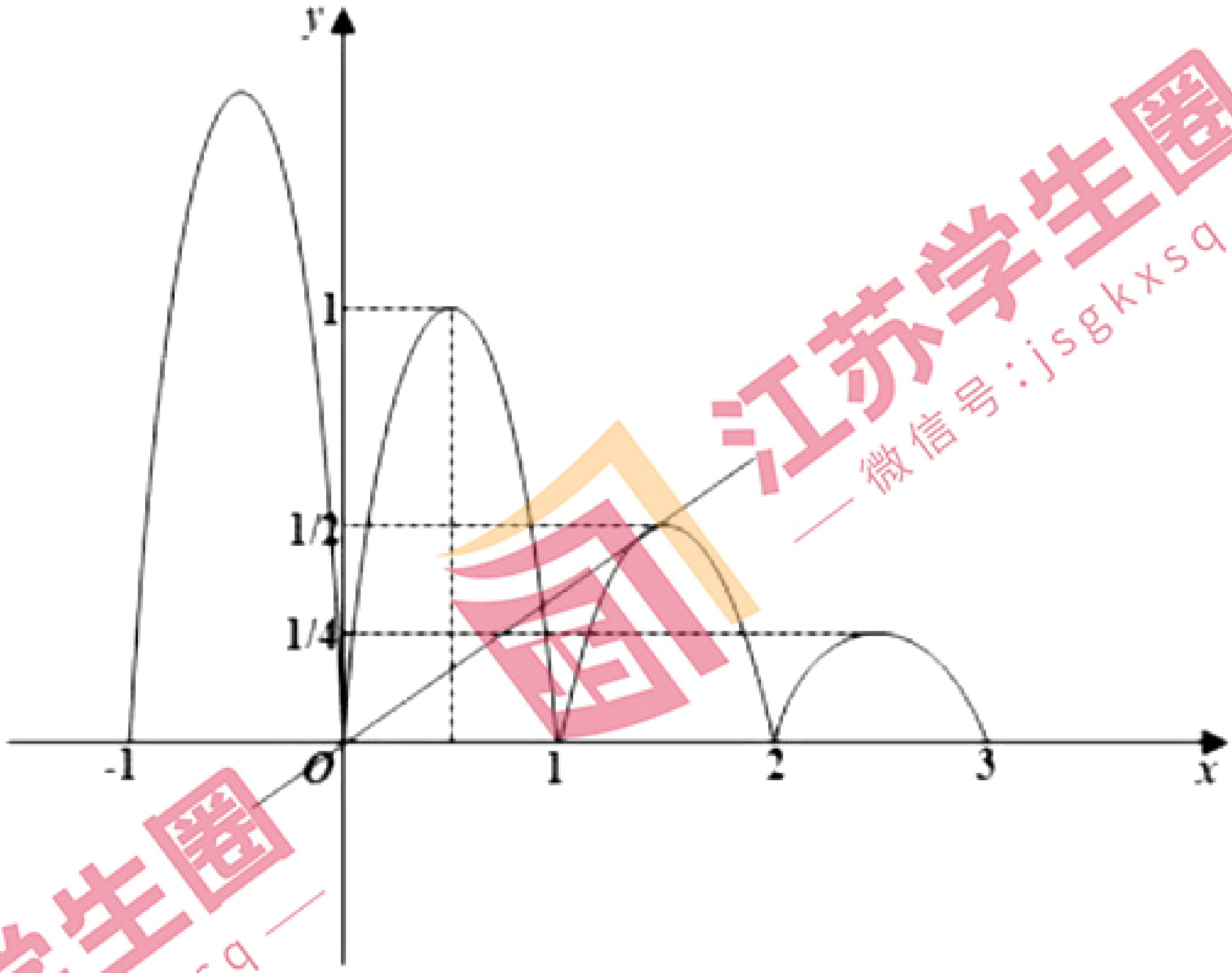
**方法二**：$x\in(0,1]$时，$f(x)=-4x(x-1)$，

当$x\in(1,2]$时，$f(x)=\frac{1}{2}f(x-1)=-2(x-1)(x-2)$，…，

$x\in(k,k+1]$时，$f(x)=-2^{2-k}(x-k)(x-k-1)$，

$\therefore k$取$-2$时，$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-16\left(-\frac{3}{2}+2\right)\left(-\frac{3}{2}+1\right)=4$，A正确.

作出$f(x)$大致图象如下，联立$\begin{cases}y=\frac{1}{3}x\\ y=-2(x-1)(x-2)\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$或$\frac{4}{3}$，




$y=f(x)$与$y=\frac{1}{3}x$共四个交点，B 错.

对于 C，$k$ 为奇数时，$f\left(\frac{k}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}$，$k$ 为偶数时，$f\left(\frac{k}{2}\right)=0$.

$$\therefore \sum_{i=1}^{2n} f\left(\frac{i}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{2n-1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{2}{2^{n}}$$，C 正确.

对于 D，当$x\in(1,2)$时，令$f(x)=-2(x-1)(x-2)=\frac{3}{8}\Rightarrow x=\frac{5}{4}$或$x=\frac{7}{4}$，

结合图象知$x_{max}=\frac{7}{4}$，D 正确；选 ACD.

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 已知集合$A=\{x\mid(x+1)(x-1)<0\}$，非空集合$B=\{x\mid m<x<1\}$，若"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要不充分条件，则实数$m$的取值范围为________.

【答案】$(-1,1)$

【解析】$A=\{x\mid -1<x<1\}$，"$x\in A$" 是 "$x\in B$" 的必要不充分条件，

则 $B\subsetneqq A$，则 $-1<m<1$.

14．曲线 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在点 $(-\pi,0)$ 处的切线方程为________.

【答案】$y=\dfrac{1}{\pi}x+1$

【解析】$y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，$k=\dfrac{-\pi\cos(-\pi)}{\pi^2}=\dfrac{1}{\pi}$，切线：$y=\dfrac{1}{\pi}(x+\pi)=\dfrac{1}{\pi}x+1$.

15．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$S_k=-2$，$S_{k+1}=0$，$S_{k+2}=-3$，则正整数 $k$ 的值为

________.

【答案】4

【解析】$S_{k+1}=\dfrac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2}=0$，$\therefore a_1+a_{k+1}=0$，$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$

$a_{k+2}=S_{k+2}-S_k=3$，$\therefore d=a_{k+2}-a_{k+1}=1$，$\therefore S_k=k(-2)+\dfrac{k(k-1)}{2}\cdot 1=-2$，

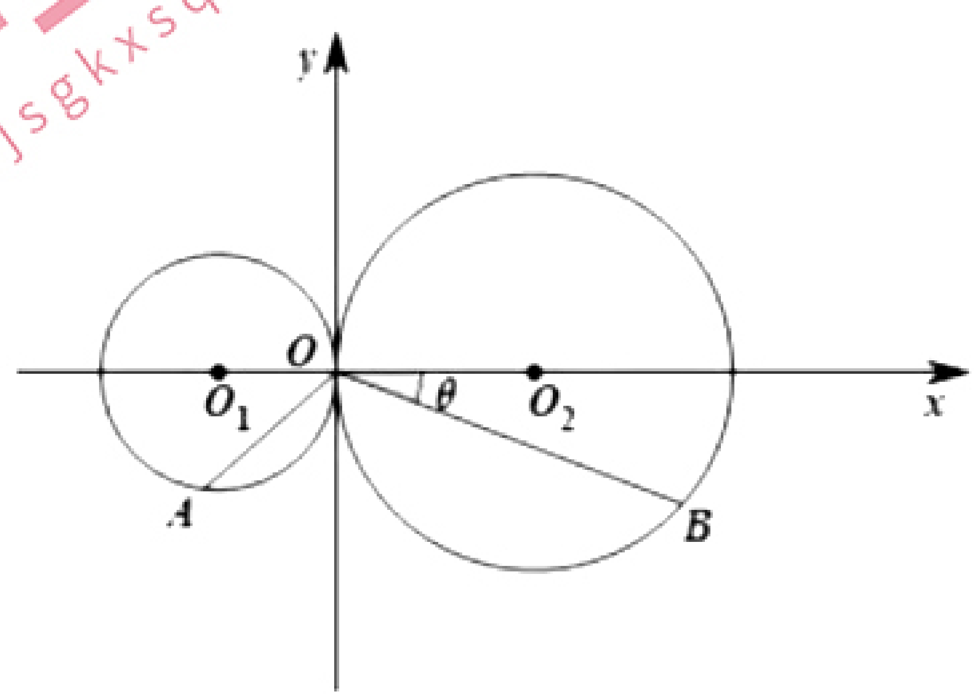
$\therefore k=1$（舍）或 $4$.

16．圆 $O_1$ 与圆 $O_2$ 半径分别为 $1$ 和 $2$，两圆外切于点 $P$，点 $A,B$ 分别为圆 $O_1$，圆 $O_2$ 上的动点

且 $\angle APB=120^\circ$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为________.

【答案】$-3$

【解析】方法一：如图建系，圆 $O_1:(x+1)^2+y^2=1$，圆 $O_2:(x-2)^2+y^2=4$，$P(0,0)$



设$\angle O_2PB=\theta$，则$\angle O_1PA=60^\circ-\theta$，$PB=4\cos\theta$，$PA=2\cos(60^\circ-\theta)$，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=8\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\left(-\frac{1}{2}\right)=-4\cos\theta\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$

$$=-4\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta\right)=-4\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2\theta+\frac{1}{4}(1+\cos2\theta)\right]$$

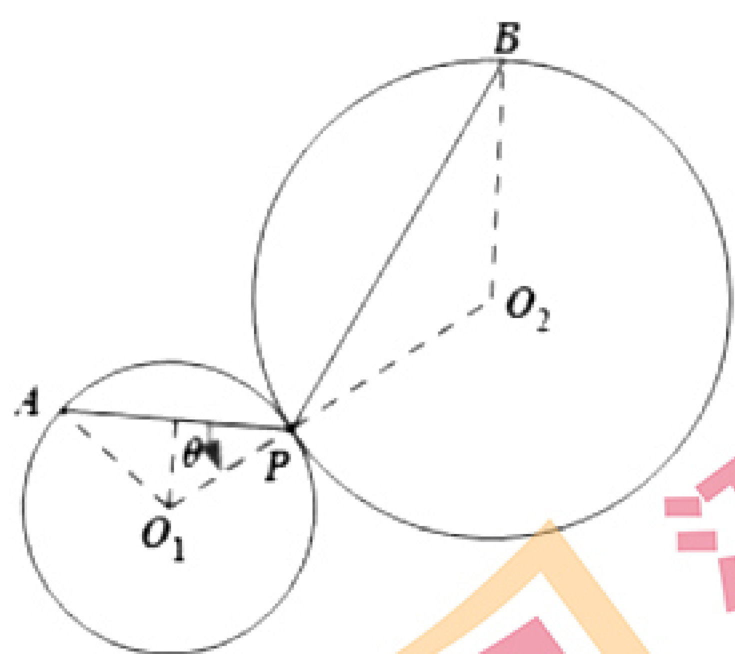
$$=-4\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2\theta+\frac{1}{4}\cos2\theta+\frac{1}{4}\right]=-4\left[\frac{1}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\right]$$

$$\geq-4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-3.$$

方法二：设$\angle APO_1=\theta$，$\therefore\angle AO_1P=\pi-2\theta$，$\angle BO_2P=\frac{\pi}{3}+\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，

$$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=2\cos\theta+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\left[\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\right]\leq-3,$$

$$\therefore(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})_{\min}=-3.$$




**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17.（10分）$\triangle ABC$的内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，已知$a\cos B+b\cos A=\dfrac{c}{2\cos C}$.

（1）求$C$；

（2）若$c=6$，$AB$边上的高等于$2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

【解析】

（1）$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sin C}{2\cos C}$，

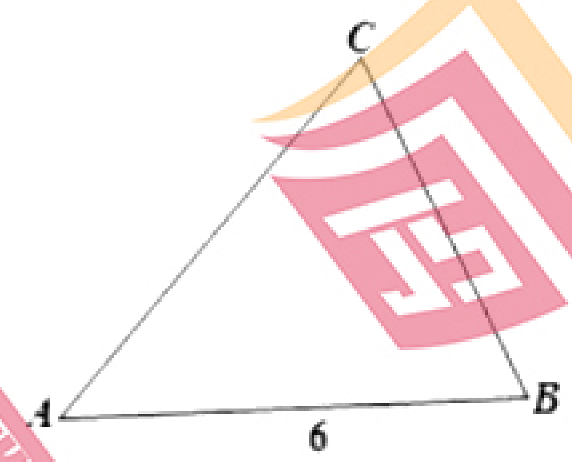
$\therefore\sin(A+B)=\dfrac{\sin C}{2\cos C}\Rightarrow\cos C=\dfrac{1}{2}$，$C=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}\Rightarrow ab=24$，

且$a^2+b^2-2ab\cdot\frac{1}{2}=36\Rightarrow a^2+b^2=60$，

$\therefore(a+b)^2=60+48=108$，$a+b=6\sqrt{3}$，

$\therefore\triangle ABC$周长为$6\sqrt{3}+6$.




18.（12分）在平行四边形$ABCD$中，$AB=2$，$AD=1$，$E,F$分别为$BC$，$CD$的中点，点$P$在线段$DE$上运动.

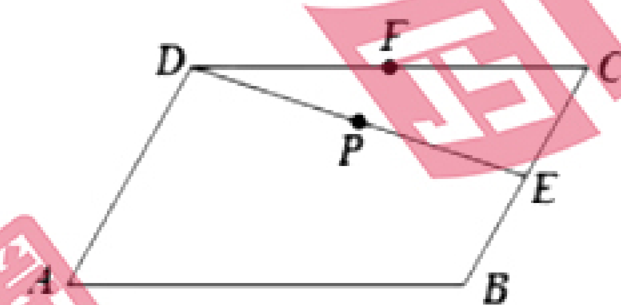
（1）当$P$为$DE$中点时，设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，求$\lambda+\mu$的值；

（2）若$\angle BAD=60^\circ$，求$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}$的取值范围.

【解析】

（1）$P$为$DE$中点时，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，

$\therefore\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}\\ \mu=\frac{3}{4}\end{cases}$，$\lambda+\mu=\frac{5}{4}$.




（2）设$DP=\lambda DE,\lambda\in[0,1]$，

$\therefore\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}=\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AF}=\left[\lambda\overrightarrow{AB}+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AD}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\frac{\lambda}{2}\times4+\left(\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{4}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\cdot1$

$=2\lambda+\left(\frac{3}{4}\lambda+\frac{1}{2}\right)\cdot2\cdot\frac{1}{2}+1-\frac{\lambda}{2}=\frac{9\lambda}{4}+\frac{3}{2}\in\left[\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right]$.

19．（12 分）设 $S_n$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=n-(-1)^n S_n$，$a_1+b_1=3$，$a_2-b_2=5$.

（1）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$.

①求 $T_{10}$；

②若集合 $A=\{n\mid n\le 100 且 T_n\le 100, n\in\mathbf{N}^*\}$，求集合 $A$ 中所有元素的和.

【解析】

（1）$b_1=1+a_1$，$b_2=2-(a_1+a_2)$，结合 $a_1+b_1=3$，$a_2-b_2=5$，

$\therefore\begin{cases}a_1=1\\b_1=2\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a_2+b_2=1\\a_2-b_2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=3\\b_2=-2\end{cases}$，$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$，$S_n=n^2$，

$\therefore b_n=n-(-1)^n\cdot n^2$.

（2）①$T_{10}=\dfrac{(1+10)\times 10}{2}-(-1^2+2^2-3^2+4^2+\cdots+10^2)$

$=55-(1+2+\cdots+10)=0$.

②事实上 $n$ 为偶数时，$T_n=(1+2+\cdots+n)-(-1+2^2-3^2+\cdots+n^2)$

$=(1+2+\cdots+n)-(1+2+\cdots+n)=0$，均满足 $T_n\le 100$，

$n$ 为奇数时，$T_n=\dfrac{(1+n)n}{2}-(-1^2+2^2-3^2+\cdots+(n-1)^2-n^2)$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}-(1+2+\cdots+n-1)+n^2=n^2+n$

当 $T_n\le 100$ 时 $\Rightarrow n^2+n\le 100$，$\therefore n\le 9$，$n=1,3,5,7,9$

$\therefore A$ 中所有元素的和为：$(2+4+\cdots+100)+(1+3+5+7+9)=\dfrac{102\times 50}{2}+25=2575$.

20．（12 分）设函数 $f(x)=\log_2\left(\dfrac{1}{x}+a\right)(a\in\mathbf{R})$.

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)<2$ 的解集；

（2）当 $a>0$ 时，若对任意 $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过1，求 $a$ 的取值范围.

【解析】

（1）$a=2$时，由$\log_2\left(\frac{1}{x}+2\right)<2\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+2>0\\ \frac{1}{x}+2<4\end{cases}\Rightarrow x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{1}{2}$，

解集为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

（2）显然$f(x)$在$[t,t+1]$上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=f(t)-f(t+1)=\log_2\left(\frac{1}{t}+a\right)-\log_2\left(\frac{1}{t+1}+a\right)\leq 1$，

$\therefore\frac{\frac{1}{t}+a}{\frac{1}{t+1}+a}\leq 2\Rightarrow a\geq\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}\right)_{\max}$，

而$\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}=\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}\right)[(t+1)-t]=\frac{t+1}{t}+\frac{2t}{t+1}-3$，

令$\frac{t+1}{t}=1+\frac{1}{t}=m,m\in[2,3]$，$\therefore\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}=m+\frac{2}{m}-3\leq\frac{2}{3}$，

$\therefore a\geq\frac{2}{3}$.

21．（12分）各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前$n$项和记为$S_n$，已知$a_1=1$，且$(S_{n+1}+1)a_n=(S_n+1)a_{n+1}$对一切$n\in\mathbf{N}^*$都成立.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）在$a_k$和$a_{k+1}$之间插入$k$个数，使这$k+2$个数组成等差数列，将插入的$k$个数之和记为$c_k$，其中$k=1,2,\cdots,n$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和.

【解析】

（1）$\because\frac{S_{n+1}+1}{a_{n+1}}=\frac{S_n+1}{a_n}$，$\therefore\frac{S_n+1}{a_n}=\frac{a_1+1}{a_1}=2$，$\therefore S_n=2a_n-1$①

$n\geq 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$②

①−②$\Rightarrow a_n=2a_n-2a_{n-1}\Rightarrow a_n=2a_{n-1}(n\geq 2)$，

$\therefore a_n=2^{n-1}$.

（2）$\therefore c_k=\dfrac{(a_k+a_{k+1})\cdot k}{2}=\dfrac{(2^{k-1}+2^k)\cdot k}{2}=\dfrac{3}{2}\cdot k\cdot 2^{k-1}$

记$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，

$\therefore T_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\cdot 2\cdot 2^1+\dfrac{3}{2}\cdot 3\cdot 2^2+\cdots+\dfrac{3}{2}(n-1)\cdot 2^{n-2}+\dfrac{3}{2}\cdot n\cdot 2^{n-1}$①

$2T_n=\dfrac{3}{2}\cdot 2+\dfrac{3}{2}\cdot 2\cdot 2^2+\cdots+\dfrac{3}{2}(n-2)\cdot 2^{n-2}+\dfrac{3}{2}(n-1)\cdot 2^{n-1}+\dfrac{3}{2}n\cdot 2^n$②

①−②$\Rightarrow -T_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\cdot 2+\dfrac{3}{2}\cdot 2^2+\cdots+\dfrac{3}{2}\cdot 2^{n-1}-\dfrac{3}{2}n\cdot 2^n$

$=\dfrac{\frac{3}{2}\cdot 1(1-2^n)}{1-2}-\dfrac{3}{2}n\cdot 2^n=\dfrac{3}{2}(2^n-1)-\dfrac{3}{2}n\cdot 2^n=\dfrac{3}{2}[(1-n)\cdot 2^n-1]$

$\therefore T_n=\dfrac{3}{2}[(n-1)\cdot 2^n+1]$.

22.（12分）已知函数$f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2-x(a\in\mathbf{R})$.

（1）当$a=1$时，求证：函数$f(x)$为减函数；

（2）若$f(x)$有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$，且$\ln x_1+\lambda\ln x_2>1+\lambda$恒成立，求正实数$\lambda$的取值范围.

【解析】

（1）$a=1$时，$f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{2}x^2-x$，$f'(x)=\ln x+1-x-1=\ln x-x\le -1<0$，

$\therefore f(x)$为减函数.

（2）$f'(x)=\ln x+1-ax-1=\ln x-ax$有两个变号零点，$f''(x)=\dfrac{1}{x}-a$，

当$a\le 0$时，$f''(x)>0$，$f'(x)$在$(0,+\infty)$上↗，$f'(x)$不可能有两个零点，舍.

当$a>0$时，$f'(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上↗；$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上↙

要使$f'(x)$有两个零点，必有$f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}-1>0\Rightarrow 0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

且注意到$f'(1)=-a<)$，$f'\left(\dfrac{1}{a^2}\right)=\ln\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a}<0$，

$\therefore f'(x)$在$\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$和$\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a^2}\right)$上各有一个零点$x_1,x_2$，$1<x_1<\mathrm{e}<x_2$，

$\begin{cases}\ln x_1-ax_1=0\\ \ln x_2-ax_2=0\end{cases}$，由$\ln x_1+\lambda\ln x_2>1+\lambda\Rightarrow\lambda(\ln x_2-1)>1-\ln x_1$

$\therefore \lambda>\dfrac{1-\ln x_1}{\ln x_2-1}$恒成立，令$\dfrac{x_2}{x_1}=t,t>1$，$\therefore\begin{cases}\ln x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}\\ \ln x_2=\ln t+\ln x_1=\dfrac{t\ln t}{t-1}\end{cases}$

$\therefore \dfrac{1-\ln x_1}{\ln x_2-1}=\dfrac{1-\dfrac{\ln t}{t-1}}{\dfrac{t\ln t}{t-1}-1}=\dfrac{t-1-\ln t}{t\ln t-t+1}$，令$g(t)=\dfrac{t-1-\ln t}{t\ln t-t+1}$

$$g'(t)=\frac{\left(1-\dfrac{1}{t}\right)(t\ln t-t+1)-(t-1-\ln t)\ln t}{(t\ln t-t+1)^2}$$

$$=\frac{\ln^2 t-t-\dfrac{1}{t}+2}{(t\ln t-t+1)^2}=\frac{\ln^2 t-\left(\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2}{(t\ln t-t+1)^2}<0$$

$\therefore g(t)$在$(1,+\infty)$上↙，且$\lim\limits_{t\to1}g(t)=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{1-\dfrac{1}{t}}{\ln t}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{1}{t}}=1$，$\therefore g(t)<1$，

$\therefore \lambda\geq1$.