4. 对任意满足 $a_1+a_2+\cdots+a_{2023}=100$ 的非负实数组 $(a_1,a_2,\ldots,a_{2023})$，记 N 为 $\{(i,j)\,|\,i\leqslant j, a_ia_j\geqslant 1\}$ 的元素个数，求证：$N\leqslant 5050$，并给出取等的充要条件.

解:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2023}$ 中所有正实数为 $b_1,b_2,\cdots,b_k$；
设 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 中共有 x 个数不小于 1，$b_ib_j(1\leqslant i<j\leqslant k)$ 中共有 y 个数不小于 1.
则 $100=b_1+b_2+\cdots+b_k\geqslant x$，由条件知

$$\begin{aligned}10000&=(b_1+b_2+\cdots+b_k)^2\\&=\sum_{i=1}^{k}b_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}b_ib_j\\&\geqslant x+2y\end{aligned}$$

则

$$N=x+y=\frac{(x+2y)+x}{2}\leqslant\frac{10100}{2}=5050$$

另一方面，容易知道取等时有 $x=100$，这代表 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 中共有 100 个数不小于 1，因此必有 $a_1,a_2,\cdots,a_{2023}$ 中恰有 100 个 1，其余均为 0，此即为 $N=5050$ 的充要条件.

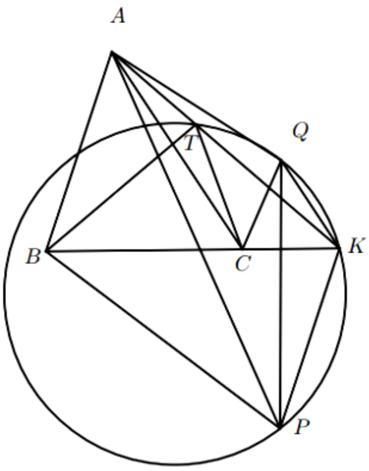
此题为本届 CMO 考试中难度最低的一题。首先，此题的取等条件容易猜出，而在发现取等时 a_i 中有较多的 0 出现后，将其中所有的正实数列出，直接平方展开便可得到所需上界，而在放缩中也可以直接得到取等的充要条件。

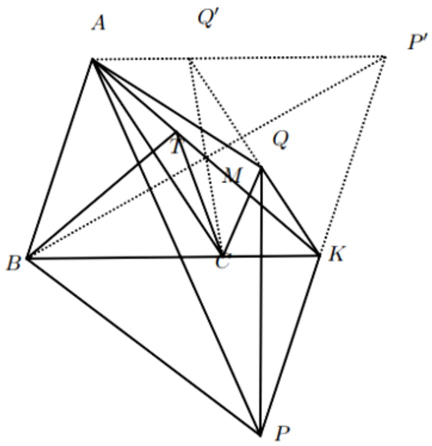
5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，K 为 BC 延长线上一点，过 K 分别作 AB, AC 平行线 KP, KQ，若 $BK=BP$，$CK=CQ$，且 $\triangle KPQ$ 的外接圆与 AK 交于点 T，证明：

(1) $\angle BTC+\angle APB=\angle CQA$；

(2)$AP\cdot BT\cdot CQ=AQ\cdot CT\cdot BP$.

解：





(1) 如图，过 A 作 BK 的平行线，分别与直线 PK, QK 交于点 P', Q'，连接 BP', CQ'，则四边形 $AP'BK$ 为平行四边形.

所以 $AP'=BK=BP$，结合 $AB\parallel P'P$，知四边形 $ABPP'$ 为等腰梯形.

同理，四边形 $AQ'QC$ 为等腰梯形，由平行四边形的性质，可知 AK, BP', CQ' 互相平分，设公共点为 M.

显然 $\angle APB=\angle AP'B$，$\angle AQC=\angle AQ'C$，所以 $\angle CQA-\angle APB=\angle AQ'C-\angle AP'B=\angle AQ'M-\angle AP'M=\angle P'MQ'=\angle BMC$.

所以欲证明 $\angle BTC+\angle APB=\angle CQA$，只须证 $\angle BTC=\angle BMC$，即证 B,T,M,C 四点共圆.

采用同一法，设 T' 为 AK 上的一点，满足 T',M,C,B 四点共圆，只须证 T',Q,K,P 四点共圆.

易知 $KT'\cdot KM=KB\cdot KC$，以 K 为反演中心，$\sqrt{KB\cdot KC}$ 为反演半径作反演变换，则 M,T' 互为反演点，B,C 互为反演点，设 Q,Q'' 互为反演点，P,P'' 互为反演点，只需证 Q'',M,P'' 三点共线.

因为 $CQ=CK$，反演后由 $\triangle KCQ\backsim\triangle KQ''B$ 知 $Q''B=Q''K$，所以 Q'' 在 BK 中垂线上，即 Q'' 为 BK 中垂线与 KQ 的交点，同理 P'' 为 CK 中垂线与 KP 的交点，下证 Q'',M,P'' 三点共线.

建立复平面，不妨 K 对应的复数为 $k=0$，不妨 B,C 在实轴上，对应实数分别为 b,c，设 Q'',P''

对应复数分别为 x,y，则

$$\begin{cases}\dfrac{x-k}{a-c}=\dfrac{\overline{x}-\overline{k}}{\overline{a}-\overline{c}}\\[2ex] \dfrac{x-\dfrac{b+k}{2}}{b-k}=-\dfrac{\overline{x}-\dfrac{\overline{b}+\overline{k}}{2}}{\overline{b}-\overline{k}}\end{cases}\implies\begin{cases}\dfrac{x}{a-c}=\dfrac{\overline{x}}{\overline{a}-\overline{c}}\\[2ex] \dfrac{x-\dfrac{b}{2}}{b}=-\dfrac{\overline{x}-\dfrac{\overline{b}}{2}}{b}\end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{b(a-c)}{a+\overline{a}-2c}=\dfrac{b(a-c)}{2(\mathrm{Re}(a)-c)}$，同理 $y=\dfrac{c(a-b)}{2(\mathrm{Re}(a)-b)}$.

而 $\dfrac{y-\dfrac{a+k}{2}}{x-\dfrac{a+k}{2}}=\dfrac{y-\dfrac{a}{2}}{x-\dfrac{a}{2}}=\dfrac{\mathrm{Re}(a)-c}{\mathrm{Re}(a)-b}\cdot\dfrac{-bc+ac+ab-a\mathrm{Re}(a)}{-bc+ab+ac-a\mathrm{Re}(a)}=\dfrac{\mathrm{Re}(a)-c}{\mathrm{Re}(a)-b}\in\mathbb{R}$,

所以 Q'',M,P'' 三点共线，结论得证.

(2) 因为 $AP=BP'=2BM$，$CQ=CK$，$AQ=CQ'=2CM$，$BP=BK$.

所以原命题等价于证明 $\dfrac{BT}{CT}=\dfrac{AQ\cdot BP}{AP\cdot CQ}$,

即证 $\dfrac{BT}{CT}=\dfrac{2CM\cdot BK}{2BM\cdot CK}$.

由 $\dfrac{BT}{CT}=\dfrac{\sin\angle TMB}{\sin\angle TMC}=\dfrac{\sin\angle BMK}{\sin\angle CMK}=\dfrac{BK}{CK}\cdot\dfrac{CM}{BM}=\dfrac{2CM\cdot BK}{2BM\cdot CK}$ 得证.

此题为一道平面几何问题，本题最大难点在于 $\angle APB$ 与 $\angle AQC$ 的转化。结合平行线构造共圆后，可以得到两个等腰梯形，而此时图中产生了三条共中点的线段，因此可以得到一系列平行四边形。此后在证明 T,M,C,B 共圆的过程中应用同一法及点 K 引出的割线，知可用反演变换转化为共线问题，这一共线问题中所涉及到的所有点都很容易刻画，因此用任何计算方法都可得出正确结论。第一问解决后第二问便较为简单。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。