高三数学参考答案、提示及评分细则

1.A　由 $z(3+4i)=|2\sqrt{6}-i|$，得 $z=\frac{\sqrt{(2\sqrt{6})^2+(-1)^2}}{3+4i}=\frac{5(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$，所以 $\bar{z}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$. 故选 A.

2.B　由题意知，$n-1=-2,-1,1,2$，所以 $n=-1,0,2,3$，故 $A=\{-1,0,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{0,2,3\}$. 故选 B.

3.B　若 p 成立，当 $a_1=0$ 时，由 $a_{n+1}=2a_n$，得 $a_n=0$，此时 $\{a_n\}$ 不是等比数列，故 p 不是 q 的充分条件；若 q 成立，则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，所以 $a_{n+1}=2a_n$，则 p 是 q 的必要条件，故 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

4.C　由不等式的性质知，当 $c<0$ 时，A 不正确；当 $a=-1,b=1,c=0$ 时，$ac^2\geqslant bc^2$ 成立，但 $a>b$ 不成立，故 B 不正确；对于 C，由条件知，$c\neq0$，所以 $c^2>0$，在 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ 两边同乘以 c^2，得 $ac<bc$，故 C 正确；当 $a=-3,b=0$ 时，满足 $a<b$，但 $a^2=9>0=b^2$，故 D 不正确. 故选 C.

5.C　由题意知，从 2020 年起，每年投入的研发资金数成以 1.09 为公比的等比数列，设该数列为 $\{a_n\}$，则 $a_n=120\times1.09^{n-1}$；由 $120\times1.09^{n-1}>200$，得 $1.09^{n-1}>\frac{10}{6}$，两边取对数，得 $(n-1)\lg 1.09>\lg 10-\lg 6$，即 $n-1>\frac{1-\lg 2-\lg 3}{\lg 1.09}\approx\frac{1-0.3010-0.4771}{0.0374}\approx5.93$，所以 $n>6.93$，所以 $n\geqslant7$ 时，该公司全年投入的研发资金开始超过 200 亿元，即研发资金开始超过 200 亿元的年份为 2026 年. 故选 C.

6.D　对于 A，若 $a\subset\alpha,b\subset\beta$ 且 $a/\!/b$，则 α 与 β 平行或相交，所以 A 不正确；对于 B，当且仅当 a,b 是相交直线时，$\alpha/\!/\beta$，所以 B 不正确；对于 C，当且仅当 $b\subset\beta$ 或 $b/\!/\beta$ 时，$b\perp\alpha$，所以 C 不正确；对于 D，若 α 与 β 不平行，则 α 与 β 相交，设 $\alpha\cap\beta=c$，由 $b/\!/\alpha,b\subset\beta$，得 $b/\!/c$，同理可得 $a/\!/c$，所以 $a/\!/b$，与 a,b 是异面直线矛盾，故 D 正确. 故选 D.

7.A　由题意知，$f(x)$ 的最小正周期为 2π，即 $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$，所以 $\omega=1$，$f(x)=\sin(x-\varphi)$；又 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\varphi+\sin\frac{\pi}{3}\sin\varphi=\frac{1}{2}\cos\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi=\cos\varphi$，所以 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，令 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=\frac{2}{3}\pi+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的图象的对称轴方程是 $x=\frac{2}{3}\pi+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=-1$，得 $x=-\frac{\pi}{3}$，即 $f(x)$ 的图象的一条对称轴方程是 $x=-\frac{\pi}{3}$. 故选 A.

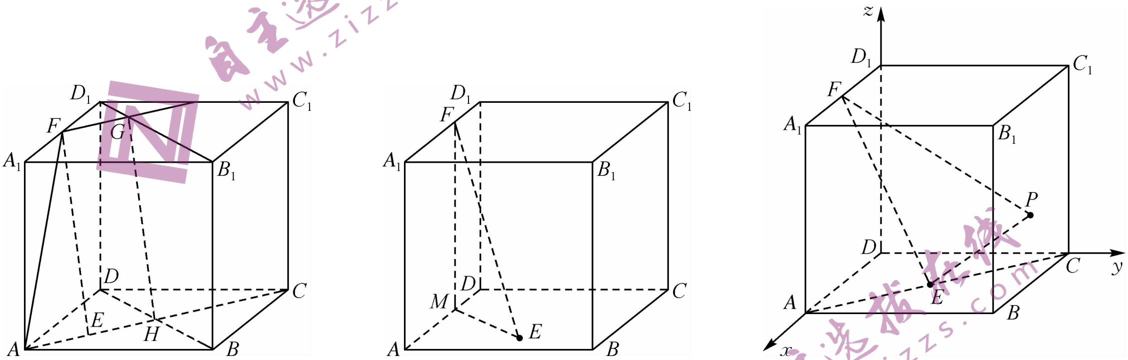
8.C　设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq0)$，由题意得 $(1+d)^2=1\times(1+4d)$，解得 $d=2$（0 根舍），所以 $a_n=2n-1$，$S_n=n^2$，当 n 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_n-1=n^2-1=4k(k-1)$ 为偶数；当 n 为偶数时，设 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_n-1=n^2-1=4k^2-1$ 为奇数，所以 $b_n=4n^2-1$，则 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{1011}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_{1011}}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2023}\right)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2023}\right)=\frac{1011}{2023}$. 故选 C.

9.BC　设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_{2023}a_{2024}>0$，得 $a_1^2q^{4045}>0$，显然 $q>0$. 若 $q=1$，由 $a_1>1$，得 $\frac{a_{2024}-1}{a_{2023}-1}=1>0$，与已知矛盾，故 $q\neq1$. 若 $q>1$，由 $a_1>1$，得 $\frac{a_{2024}-1}{a_{2023}-1}=\frac{a_1q^{2023}-1}{a_1q^{2022}-1}>\frac{a_1q^{2022}-1}{a_1q^{2022}-1}=1>0$，与已知矛盾，故 $0<q<1$，又 $a_1>1$，所以 $\{a_n\}$ 是单调递减数列，且 $a_n>0$，故 A 错误，B 正确；由 $\frac{a_{2024}-1}{a_{2023}-1}<0$，$a_1>1$ 及 $0<q<1$，得 $a_1>a_2>\cdots>a_{2023}>1>a_{2024}$，所以 Π_{2023} 为 $\{\Pi_n\}$ 的最大项，故 C 正确，D 错误. 故选 BC.

10.BCD　对于 A，$\alpha=\frac{\pi}{6}+2\pi$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，显然 α,β 均为第一象限角，但 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan\beta=\sqrt{3}$，$\tan\alpha>\tan\beta$ 不成立，故 A 错误；对于 B，因为 α 为第一象限角，所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，所以 $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos2\alpha}}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos2\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha}=\sqrt{2}$，故 B

正确；对于 C，因为 A,B 为 $\triangle ABC$ 的内角，且 $\tan A\cdot\tan B>1$，所以 A,B 为锐角，又 $\tan C=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}>0$，所以 C 为锐角，故 C 正确；对于 D，因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $A+B>\dfrac{\pi}{2}$，所以 $A>\dfrac{\pi}{2}-B$，又 $A,\dfrac{\pi}{2}-B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin A>\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，同理 $\sin B>\cos A$，所以 $\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$，故 D 正确. 故选 BCD.

11. ABC　不妨设正方体的棱长为 2，若 $x=\dfrac{1}{2}$，则点 E 在底面 $ABCD$ 内且在 AB 的中垂线上，所以 $\triangle BCE$ 的面积 $S=1$，所以三棱锥 E-BCF 的体积 $V_{E\text{-}BCF}=V_{F\text{-}BCE}=\dfrac{1}{3}\times S\times 2=\dfrac{2}{3}$，故 A 正确；若 $z=\dfrac{1}{2}$，$x=y$，则点 F 为 A_1D_1 的中点，点 E 在线段 AC 上，过 F 作 AC 的平行线交 B_1D_1 于点 G，设 H 为 AC 与 BD 的交点，连接 GH，当点 E 在线段 AH 上，且 $EH=FG$ 时，易得 $EF/\!/GH$，从而可得 $EF/\!/$ 平面 BDD_1B_1，故 B 正确；过 F 作 $FM/\!/AA_1$，交 AD 于点 M，连接 EM，则 $\angle EFM=\alpha$，$\angle FEM=\beta$，由 $FM\perp$ 平面 $ABCD$，$ME\subset$ 平面 $ABCD$，得 $FM\perp EM$，所以 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，故 C 正确；若 $x=y=z=\dfrac{1}{2}$，则点 F 为 A_1D_1 的中点，E 为 AC 的中点，以 D 为坐标原点，以 DA,DC,DD_1 所在的直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则 $E(1,1,0)$，$F(1,0,2)$，设 $P(a,2,c)(0<a<2,0<c<2)$，所以 $\overrightarrow{PE}=(1-a,-1,-c)$，$\overrightarrow{PF}=(1-a,-2,2-c)$，若 $PE\perp PF$，则 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PE}=0$，即得 $(1-a)^2+2+c(c-2)=(1-a)^2+1+(c-1)^2=0$，易知方程无解，不存在点 P，故 D 错误. 故选 ABC.



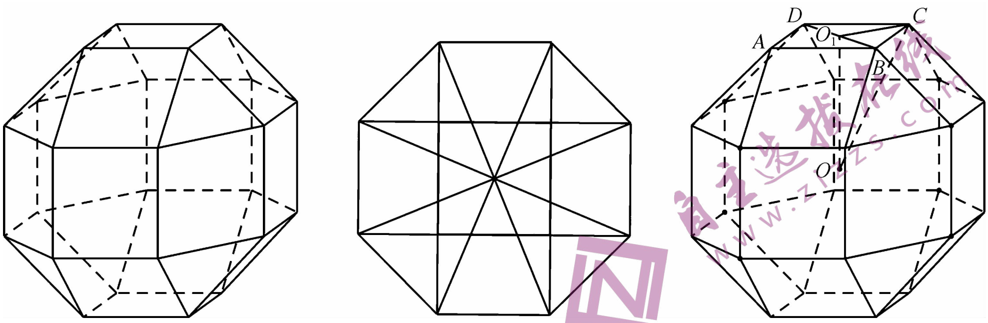
12. ACD　因为 $f(x+1)$ 是奇函数，所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$，故 $f'(-x+1)=f'(x+1)$，故 A 正确；又 $g(x)=(x-1)f(x)$，所以 $g(x+1)=xf(x+1)$，所以 $g(-x+1)=-xf(-x+1)=xf(x+1)=g(x+1)$，故 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，$g'(1+x)=-g'(1-x)$，故 B 错误，C 正确；又 $g(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，由对称性知 $g(1-\ln 1.1)=g(1+\ln 1.1)$，令 $h(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\ln x-1$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，易知 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $h'(1)=0$，所以在 $(0,1)$ 上，$h'(x)<0$，在 $(1,+\infty)$ 上，$h'(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(1)=0$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立），所以 $h(1.1)>0$，所以 $\mathrm{e}^{0.1}>1+\ln 1.1>1$，所以 $g(\mathrm{e}^{0.1})>g(1+\ln 1.1)>g(1)=0$，故 D 正确. 故选 ACD.

13. -2　由 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，$\boldsymbol{c}=(n,2)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，得 $-2+m=0$，$-2\times2-n=0$，解得 $m=2$，$n=-4$，所以 $m+n=-2$.

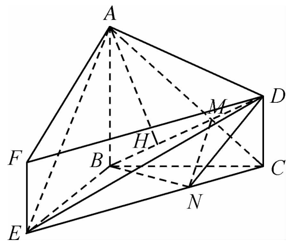
14. $4n-2$（答案不唯一）　若 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，则 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$，则 $\sqrt{S_n}=\sqrt{\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n}$，若 $\{\sqrt{S_n}\}$ 也为等差数列，则 $a_1-\dfrac{d}{2}=0$，即 $d=2a_1$，且 $d\geqslant0$，取 $a_1=2$，则 $d=4$，此时 $a_n=4n-2$，$\{a_n\}$ 具有性质 P.

15. $(-\infty,2)$　因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，所以在 $\mathbf{R}$ 上存在唯一实数 a，使得 $f(a)=11$，所以 $f(x)-2^x=a$，即 $f(x)=2^x+a$，令 $x=a$，得 $f(a)=2^a+a$，所以 $2^a+a=11$；因为函数 $g(x)=2^x+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(3)=11$，所以 $a=3$，从而 $f(x)=2^x+3$；由 $f(x)<7$，得 $2^x+3<7$，解得 $x<2$，故不等式 $f(x)<7$ 的解集为 $(-\infty,2)$.

16. $(5+2\sqrt{2})\pi$　由对称性知该多面体的各顶点在棱长为$\sqrt{2}+1$的正方体的表面上，如图，设其外接球的球心为O，上面正方形$ABCD$的中心为O_1，则点O到平面$ABCD$的距离$OO_1=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，又$O_1C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以该多面体外接球的半径$r=\sqrt{OO_1^2+O_1C^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{2}$，故该球的表面积为$4\pi\times\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{2}\right)^2=(5+2\sqrt{2})\pi$.



17. 证明：(1)连接AC交BD于点M，连接MN，



因为$AB/\!/CD$，$AB=2CD$，所以$\frac{CM}{MA}=\frac{CD}{AB}=\frac{1}{2}$，………………………… 1分

又$EN=2CN$，所以$\frac{CN}{EN}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{CN}{EN}=\frac{CM}{MA}$，………………………… 2分

所以$MN/\!/AE$.

又$MN\subset$平面BND，$AE\not\subset$平面BND，所以$AE/\!/$平面BND. ………………………… 4分

(2)过A在平面$ABCD$内作$AH\perp BD$，垂足为H，因为平面$BDE\perp$平面$ABCD$，平面$BDE\cap$平面$ABCD=BD$，所以$AH\perp$平面BDE. ………………………… 6分

又$BE\subset$平面BDE，所以$AH\perp BE$. ………………………… 7分

因为$AB\perp BE$，$AB\cap AH=A$，$AB,AH\subset$平面$ABCD$，

所以$BE\perp$平面$ABCD$，………………………… 9分

又$AD\subset$平面$ABCD$，所以$BE\perp AD$. ………………………… 10分

18. 解：(1)因为$a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2,\end{cases}$且$(S_{n+1}-S_{n-1})(S_{n+1}-2S_n+S_{n-1})=2(n\geqslant 2)$，

所以$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=2$，即$a_{n+1}^2-a_n^2=2(n\geqslant 2)$，………………………… 2分

又$a_2^2-a_1^2=3-1=2$，所以$a_{n+1}^2-a_n^2=2(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以$\{a_n^2\}$是以1为首项，2为公差的等差数列，………………………… 3分

所以$a_n^2=1+2(n-1)=2n-1$，………………………… 4分

又$a_n>0$，所以$a_n=\sqrt{2n-1}$，

所以$\log_{\sqrt{3}}\sqrt{5}\times\log_{\sqrt{5}}\sqrt{7}\times\log_{\sqrt{7}}\sqrt{9}\times\cdots\times\log_{\sqrt{2m-1}}\sqrt{2m+1}=6$，………………………… 5分

所以$\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2m+1}=6$，所以$2m+1=3^6=729$，所以$m=364$. ………………………… 6分

(2)截止到b_{k+1}，新数列$\{c_n\}$的项数为$(1+2+\cdots+k)+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$，………………………… 8分

令$\frac{(k+1)(k+2)}{2}\leqslant 30$，则$k\leqslant 6$，………………………… 9分

所以在$\{c_n\}$的前30项中含有$\{b_n\}$的项有7项，含有$\{a_n^2\}$的项有$30-7=23$项，………………………… 10分

其中$\{b_n\}$中的7项的和为$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7=1+3+\cdots+3^6=1\ 093$，

$\{a_n^2\}$中的23项的和为

$a_1^2+(a_2^2+a_3^2)+(a_3^2+a_4^2+a_5^2)+(a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2)+(a_5^2+a_6^2+a_7^2+a_8^2+a_9^2)+(a_6^2+a_7^2+a_8^2+a_9^2+a_{10}^2+a_{11}^2)+(a_7^2+a_8^2)$

$=1+(3+5)+(5+7+9)+(7+9+11+13)+(9+11+13+15+17)+(11+13+15+17+19+21)+(13+15)$

$=259$,

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_{30}=1\ 093+259=1\ 352$. ………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)因为 $\dfrac{4S}{\tan B}=a^2\cos B+ab\cos A$,所以 $\dfrac{4\times\frac{1}{2}ac\sin B\cos B}{\sin B}=a^2\cos B+ab\cos A$,

即 $2c\cos B=a\cos B+b\cos A$, ……………………………………………………………………… 2 分

由正弦定理,得 $2\sin C\cos B=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)$,

因为 $A+B=\pi-C$,所以 $2\sin C\cos B=\sin C$, ……………………………………………………… 4 分

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $\sin C\neq0$,所以 $\cos B=\dfrac{1}{2}$,

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………………………………………………… 6 分

(2)由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,即 $9=a^2+c^2-ac$,

所以 $9=(a+c)^2-3ac$,即 $ac=\dfrac{1}{3}[(a+c)^2-9]$, ………………………………………………… 8 分

因为 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$,$l=a+c+3$,所以 $\dfrac{S}{l}=\dfrac{\sqrt{3}ac}{4(a+c+3)}=\dfrac{\sqrt{3}[(a+c)^2-9]}{12(a+c+3)}$,

所以 $\dfrac{S}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}(a+c-3)$, ……………………………………………………………………… 10 分

又 $ac\leqslant\dfrac{(a+c)^2}{4}$(当且仅当 $a=c=3$ 时取等号),所以 $9=(a+c)^2-3ac\geqslant\dfrac{(a+c)^2}{4}$(当且仅当 $a=c=3$ 时取等号),所以 $a+c\leqslant6$(当且仅当 $a=c=3$ 时取等号),

所以 $\dfrac{S}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}(a+c-3)\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{12}\times(6-3)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$(当且仅当 $a=c=3$ 时取等号),

即 $\dfrac{S}{l}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. ……………………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明:取 BC 的中点 F,连接 OF,则 $OF=\dfrac{1}{2}(AB+CD)$,

又 $AB=3CD=6$,$BC=8$,所以 $AB+CD=BC$,所以 $OF=CF=BF=\dfrac{1}{2}BC$, ……………………… 1 分

所以 $\angle BOC=90^\circ$,即 $BO\perp CO$. ………………………………………………………………… 2 分

因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形,点 O 为 AD 的中点,所以 $PO\perp AD$,

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$,$PO\subset$ 平面 PAD,

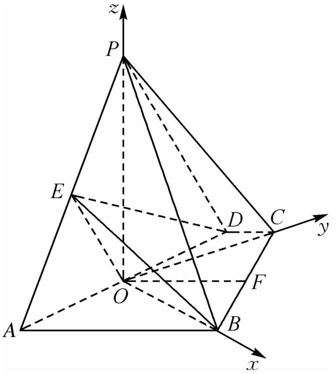
所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,

又 $CO\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PO\perp CO$, ………………………………………………………… 4 分

因为 $CO\perp BO$,$BO\cap PO=O$,$PO,BO\subset$ 平面 POB,

所以 $CO\perp$ 平面 POB,

又 $CO\subset$ 平面 POC,所以平面 $POB\perp$ 平面 POC. ……………………………… 5 分



(2)解:由(1)知,OB,OC,OP 两两垂直,以 O 为坐标原点,OB,OC,OP 所在的直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系(如图所示), ……………………………………… 6 分

因为 $OF\perp BC$,F 为 BC 的中点,且 $AB=3CD=6$,$BC=8$,

所以 $OC=OB=4\sqrt{2}$,$\angle FCO=\angle FBO=45^\circ$,$AD=4\sqrt{5}$,则 $D(-\sqrt{2},3\sqrt{2},0)$,

$B(4\sqrt{2},0,0)$,$A(\sqrt{2},-3\sqrt{2},0)$,$P(0,0,2\sqrt{15})$,$E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{15}\right)$,

所以 $\overrightarrow{OE}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{15}\right)$,$\overrightarrow{OB}=(4\sqrt{2},0,0)$,$\overrightarrow{OD}=(-\sqrt{2},3\sqrt{2},0)$. ……… 7 分

设平面 DOE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}y+\sqrt{15}z=0,\\ -\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y=0,\end{cases}$

令 $y=1$，解得 $x=3$，$z=0$，故 $\boldsymbol{n}=(3,1,0)$， ………………………………………… 9 分

设平面 BOE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}b+\sqrt{15}c=0,\\ 4\sqrt{2}a=0,\end{cases}$

令 $b=10$，解得 $a=0$，$c=\sqrt{30}$，故 $\boldsymbol{m}=(0,10,\sqrt{30})$， ………………………………………… 11 分

设平面 DOE 与平面 BOE 的夹角为 θ，所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{10}{\sqrt{10}\times\sqrt{130}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，

故平面 DOE 与平面 BOE 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由 $a_n+a_{n+1}=3\times5^{n-1}$，得 $a_{n+1}=3\times5^{n-1}-a_n$，

所以 $a_{n+1}-\dfrac{5^n}{2}=3\times5^{n-1}-a_n-\dfrac{5^n}{2}=\dfrac{5^{n-1}}{2}-a_n=-\left(a_n-\dfrac{5^{n-1}}{2}\right)$， ………………………………………… 1 分

因为 $a_1=\dfrac{1}{2}$，所以 $a_1-\dfrac{5^{1-1}}{2}=0$，从而 $a_n-\dfrac{5^{n-1}}{2}=a_{n-1}-\dfrac{5^{n-2}}{2}=\cdots=a_2-\dfrac{5^{2-1}}{2}=a_1-\dfrac{5^{1-1}}{2}=0$，………… 2 分

所以 $\left\{a_n-\dfrac{5^{n-1}}{2}\right\}$ 不是等比数列， ………………………………………… 3 分

此时 $a_n=\dfrac{5^{n-1}}{2}$. ………………………………………… 4 分

(2)由 $b_n=\begin{cases}2, n\text{ 为奇数},\\ 4n-2, n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 得 $a_nb_n=\begin{cases}5^{n-1}, n\text{ 为奇数},\\ (2n-1)\times5^{n-1}, n\text{ 为偶数},\end{cases}$ ………………………………………… 5 分

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$S_n=(a_1b_1+a_3b_3+\cdots+a_{n-1}b_{n-1})+(a_2b_2+a_4b_4+\cdots+a_nb_n)$

$=(1+5^2+\cdots+5^{2k-2})+[3\times5+7\times5^3+\cdots+(4k-1)\times5^{2k-1}]$. ………………………………………… 6 分

设 $A_k=1+5^2+5^4+\cdots+5^{2k-2}$，则 $A_k=\dfrac{1-(5^2)^k}{1-5^2}=\dfrac{5^{2k}-1}{24}$， ………………………………………… 7 分

设 $B_k=3\times5+7\times5^3+\cdots+(4k-1)\times5^{2k-1}$，则 $5^2B_k=3\times5^3+7\times5^5+\cdots+(4k-1)\times5^{2k+1}$，

两式相减，得 $-24B_k=3\times5+4\times5^3+4\times5^5+\cdots+4\times5^{2k-1}-(4k-1)\times5^{2k+1}$

$=15+4\times\dfrac{5^3[1-(5^2)^{k-1}]}{1-5^2}-(4k-1)\times5^{2k+1}=15+\dfrac{1}{6}\times5^{2k+1}-\dfrac{5^3}{6}-(4k-1)\times5^{2k+1}$

$=-\dfrac{35}{6}-\dfrac{24k-7}{6}\times5^{2k+1}$，

所以 $B_k=\dfrac{24k-7}{144}\times5^{2k+1}+\dfrac{35}{144}$， ………………………………………… 9 分

所以 $S_{2k}=A_k+B_k=\dfrac{5^{2k}-1}{24}+\dfrac{24k-7}{144}\times5^{2k+1}+\dfrac{35}{144}=\dfrac{120k-29}{144}\times5^{2k}+\dfrac{29}{144}$； ………………………………………… 10 分

当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k}b_{2k}=\dfrac{120k-29}{144}\times5^{2k}+\dfrac{29}{144}-(4k-1)\times5^{2k-1}$

$=\dfrac{24k-1}{720}\times5^{2k}+\dfrac{29}{144}$.

所以 $S_n=\begin{cases}\dfrac{12n+11}{144}\times5^n+\dfrac{29}{144}, n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{60n-29}{144}\times5^n+\dfrac{29}{144}, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)当 $a=3$，$b=0$ 时，$f(x)=2e^x-3x$，则 $f'(x)=2e^x-3$，

$f'(0)=-1$，$f(0)=2$， ………………………………………… 1 分

所以切线方程为 $y-2=-(x-0)$，即 $x+y-2=0$. ………………………………………… 2 分

(2) $f'(x)=(a-1)e^x+e^{-x}-a=\dfrac{(a-1)e^{2x}-ae^x+1}{e^x}=\dfrac{[(a-1)e^x-1](e^x-1)}{e^x}$,

若 $a-1\leqslant 0$,则 $a\leqslant 1$,令 $f'(x)=0$,得 $e^x-1=0$,解得 $x=0$,即 $f'(x)=0$ 仅有一个根,所以 $f(x)$ 不会有两个极值点,不合题意; …… 3 分

若 $a-1>0$,则 $a>1$,令 $f'(x)=0$,得 $e^x=\dfrac{1}{a-1}$,或 $e^x=1$,解得 $x_1=\ln\dfrac{1}{a-1}$,$x_2=0$,

当 $\ln\dfrac{1}{a-1}=0$,即 $a=2$ 时,$f'(x)=\dfrac{(e^x-1)^2}{e^x}\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立,函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增,无极值,不合题意; …… 4 分

当 $\ln\dfrac{1}{a-1}>0$,即 $1<a<2$ 时,易得在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(\ln\dfrac{1}{a-1},+\infty\right)$ 上,$f'(x)>0$;在 $\left(0,\ln\dfrac{1}{a-1}\right)$ 上,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(\ln\dfrac{1}{a-1},+\infty\right)$ 上单调递增,在 $\left(0,\ln\dfrac{1}{a-1}\right)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值,在 $x=\ln\dfrac{1}{a-1}$ 处取得极小值,符合题意. …… 6 分

当 $\ln\dfrac{1}{a-1}<0$,即 $a>2$ 时,易得在 $\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a-1}\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 上,$f'(x)>0$;在 $\left(\ln\dfrac{1}{a-1},0\right)$ 上,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a-1}\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增,在 $\left(\ln\dfrac{1}{a-1},0\right)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x=\ln\dfrac{1}{a-1}$ 处取得极大值,在 $x=0$ 处取得极小值,符合题意.

综上,实数 a 的取值范围为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$. …… 7 分

(3) 由(2)知,$x_1=0$,$x_2=\ln\dfrac{1}{a-1}$,所以 $f(x_1)=f(0)=a-1-1=a-2$,

$f(x_2)=f\left(\ln\dfrac{1}{a-1}\right)=(a-1)e^{\ln\frac{1}{a-1}}-e^{-\ln\frac{1}{a-1}}-a\ln\dfrac{1}{a-1}=2-a+a\ln(a-1)$,

由题意,得 $a-2+k[2-a+a\ln(a-1)]>0$ 对任意的 $a\in(1,2)$ 恒成立, …… 8 分

因为 $1<a<2$,且 $f(x)$ 在 $\left(0,\ln\dfrac{1}{a-1}\right)$ 上单调递减,所以 $f(x_2)<f(x_1)<0$,所以 $k<0$,且 $ka\ln(a-1)>(k-1)(a-2)$,则 $\ln(a-1)<\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{a-2}{a}$,

令 $g(x)=\ln x-\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{x-1}{x+1}$,其中 $0<x<1$, …… 9 分

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-2x\left(1-\dfrac{1}{k}\right)}{x(x+1)^2}=\dfrac{x^2+\dfrac{2}{k}x+1}{x(x+1)^2}$,

令 $x^2+\dfrac{2}{k}x+1=0$,则 $\Delta=\dfrac{4}{k^2}-4=\dfrac{4(1-k^2)}{k^2}$, …… 10 分

①当 $\Delta\leqslant 0$,即 $k\leqslant -1$ 时,$g'(x)\geqslant 0$,$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,

所以 $g(x)<g(1)=0$,即 $\ln(a-1)<\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{a-2}{a}$,符合题意; …… 11 分

②当 $\Delta>0$,即 $-1<k<0$ 时,设方程 $x^2+\dfrac{2}{k}x+1=0$ 的两根分别为 x_3,x_4,

则 $x_3+x_4=-\dfrac{2}{k}>0$,$x_3x_4=1$,设 $0<x_3<1<x_4$,

则当 $x_3<x<1$ 时,$g'(x)<0$,则 $g(x)$ 在 $(x_3,1)$ 上单调递减,

所以当 $x_3<x<1$ 时,$g(x)>g(1)=0$,即 $\ln(a-1)>\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{a-2}{a}$,不合题意.

综上所述,k 的取值范围是 $(-\infty,-1]$. …… 12 分