常州市教育学会 学业水平监测

高三数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡指定位置上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将答题卡交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x\mid x-1\geq 0\}$ $B=\left\{x\mid \frac{3}{x}\leq 1\right\}$，则 $A\cap(\complement_{R}B)=$

A．$(1,3)$　　B．$(1,3]$　　C．$[1,3)$　　D．$[1,3]$

【答案】C

【解析】 $A=\{x\mid x\geq 1\}$，$B=\{x\mid x<0或x\geq 3\}$，$\complement_{R}B=\{x\mid 0\leq x<3\}$

$A\cap\complement_{R}B=\{x\mid 1\leq x<3\}$，选 C.

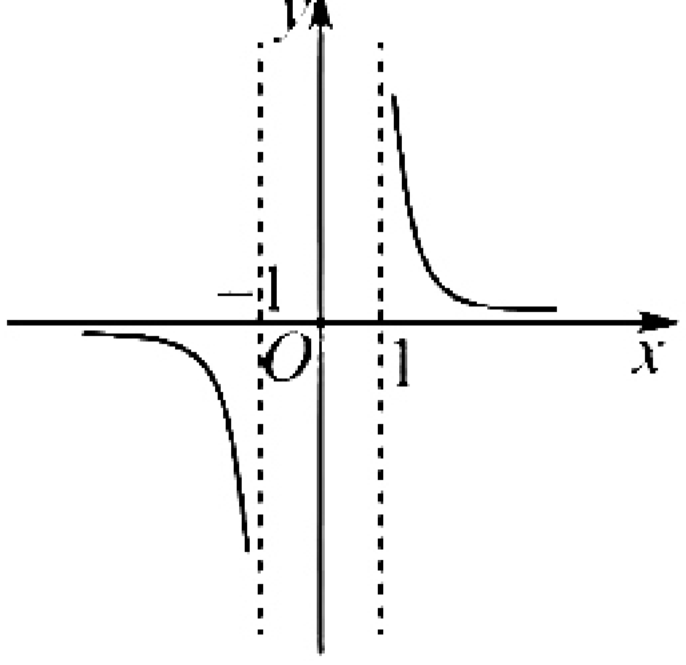
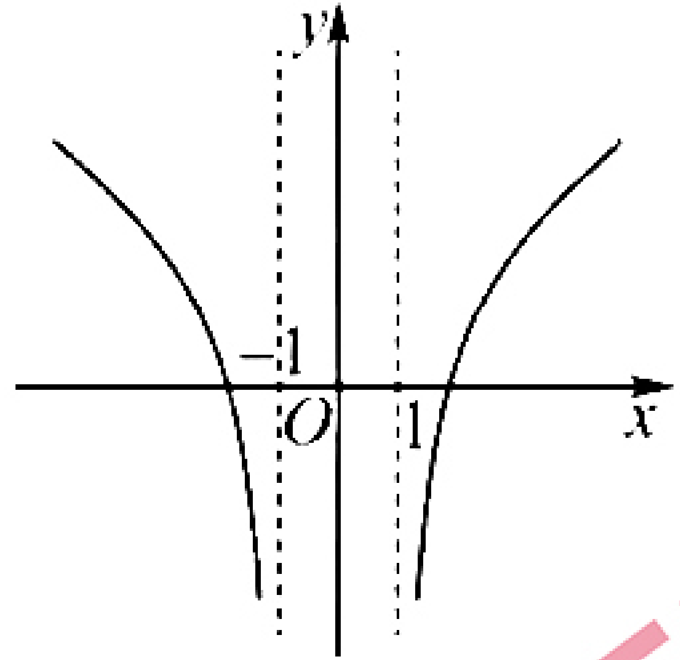
2．i是虚数单位，复数$\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$在复平面内的对应点位于

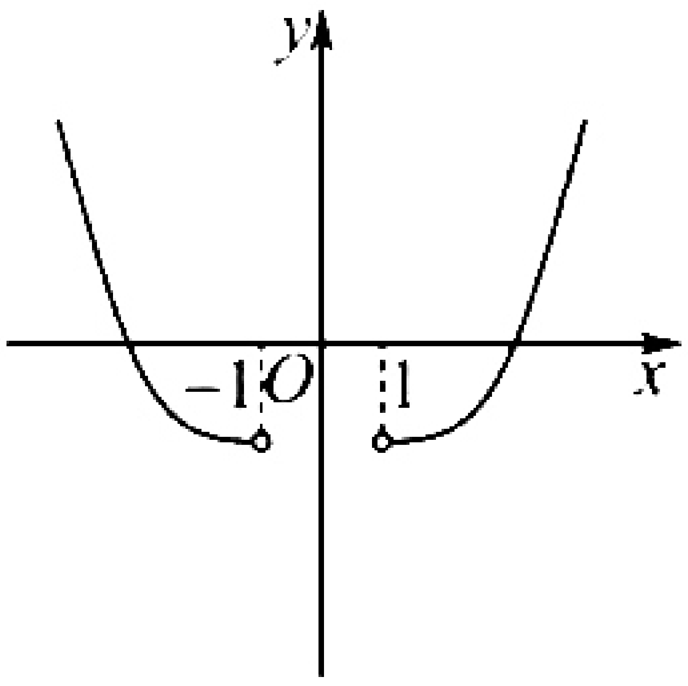
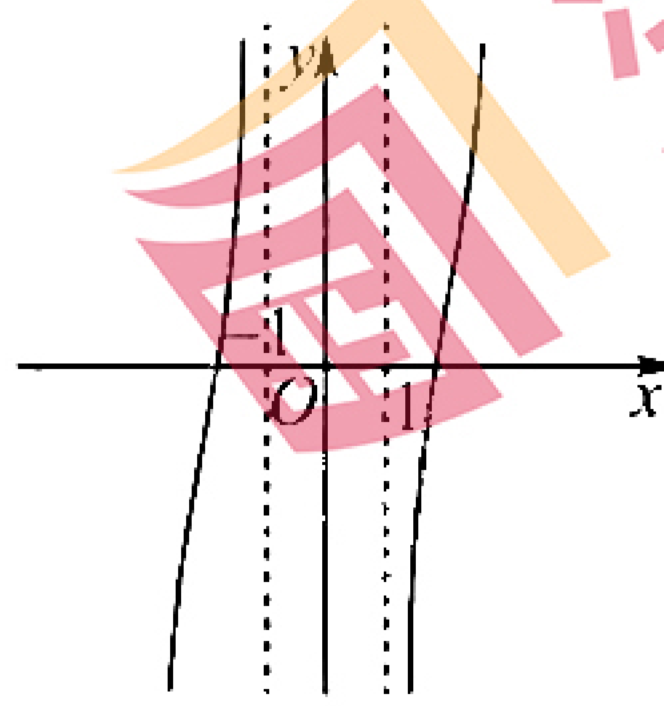
A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】A

【解析】 $\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{2}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}$位于第一象限，选 A.

3．函数 $f(x)=2x\ln(x^2-1)$ 的部分图象为

A．　B．

C．　D．

【答案】D

【解析】 $f(x)$为奇函数关于原点对称，排除BC，$1<x<2$时，$f(x)<0$，排除A，选D.

4．某学生社团举办数学史知识竞赛，经海选，甲、乙、丙、丁四位同学参加最后一轮的现场决赛，角逐唯一的冠军.有四位观赛同学对冠军的预测如下：

“甲或乙是冠军”、“甲是冠军”、“丁是冠军”、“乙、丙两人都不是冠军”.

若赛后发现，这四位同学中有且只有两位预测正确，则冠军是

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

【答案】D

【解析】 若甲是冠军，则三位预测正确，A错.

若乙是冠军，则一位预测正确，B错.

若丙是冠军，则没人预测正确，C错.

若丁是冠军，则两人预测正确，D对，选D.

5．已知$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$且$3\cos 2\alpha+\sin\alpha=1$，则

A．$\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{2}{3}$　　B．$\cos(\pi-\alpha)=-\dfrac{2}{3}$

C．$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　　　D．$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】A

【解析】$3\cos2\alpha+\sin\alpha=1$，则$3(1-2\sin^2\alpha)+\sin\alpha=1$，则$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$

$\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{2}{3}$，A 对.$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，B 错

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，C 错，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=-\dfrac{2}{3}$，D 错，选 A.

6．已知四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的两底面均为长方形，且上下底面中心的连线与底面垂直若$AB=9$，$AD=6$，$A_1B_1=3$，棱台的体积为$26\sqrt{3}$，则该棱台的表面积是

A．60　　B．$16\sqrt{3}+12\sqrt{7}$　　C．$8\sqrt{3}+6\sqrt{7}+60$　　D．$16\sqrt{3}+17\sqrt{7}+60$

【答案】D

【解析】$S_{上}=54$，$S_{下}=3\times2=6$，$V=\dfrac{1}{3}(54+6+\sqrt{54\times6})h=26\sqrt{3}$，$\therefore h=\sqrt{3}$，

侧棱$AA_1=\sqrt{13+3}=4$，$S_{ABB_1A_1}=\dfrac{1}{3}(3+9)\cdot\sqrt{7}=6\sqrt{7}=S_{CDD_1C_1}$

$S_{ADD_1A_1}=\dfrac{1}{2}(6+2)\cdot2\sqrt{3}=8\sqrt{3}=S_{BCC_1B_1}$，$S_{底}=60+12\sqrt{7}+16\sqrt{3}$，选 D.

7．已知函数$f(x)=\cos\omega x(\omega>0)$，点$A,B$分别为$f(x)$图象在$y$轴右侧的第一个最高点和第一个最低点，$O$为坐标原点，若$\triangle OAB$为锐角三角形，则$\omega$的取值范围为

A．$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}\right)$　　B．$\left(\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2},\sqrt{2}\pi\right)$　　C．$(0,\sqrt{2}\pi)$　　D．$\left(\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2},+\infty\right)$

【答案】B

【解析】$A\left(\dfrac{2\pi}{\omega},1\right)$．$B\left(\dfrac{\pi}{\omega},-1\right)$，$\triangle AOB$为锐角三角形，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，$\therefore\dfrac{2\pi^2}{\omega^2}-1>0$，

$\omega<\sqrt{2}\pi$.$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}>0$，$\therefore\dfrac{\pi}{2\omega^2}+2>0$恒成立；$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}>0$，$\therefore-\dfrac{\pi^2}{\omega^2}+2>0$

$\therefore \omega > \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ，选 B.

8．居民的某疾病发病率为1%，现进行普查化验，医学研究表明，化验结果是可能存有误差的.已知患有该疾病的人其化验结果99%呈阳性，而没有患该疾病的人其化验结果1%呈阳性.现有某人的化验结果呈阳性，则他真的患该疾病的概率是

A．0.99　　B．0.9　　C．0.5　　D．0.1

【答案】C

【解析】记“阳性”为A，记“患病”为B，$P(A|B)=99\%$，$P(\overline{B}|A)=1\%$，$P(B)=1\%$

$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{1\%}=99\%$，$\therefore P(AB)=99\%\times 1\%$，

$P(A)=P(\overline{B}A)+P(AB)=1\%+99\%\times 1\%$，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{99\%\times 1\%}{1\%+99\%\times 1\%}=0.5$，

选C.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，且$-3<f(-1)=f(1)=f(2)\le 0$，则

A．$a=-2$　　B．$b=1$　　C．$0<c\le 3$　　D．$-1<c\le 2$

【答案】AD

【解析】$f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+m$，$-3<m\le 0$，$c=2+m,-1<c\le 2$，D对，C错.

$-1+1+2=-a$，$\therefore a=-2$，A对.

$-1\times 1+(-1)\times 2+1\times 2=b$，$\therefore b=-1$，B错.

本题考查知识点：三次函数韦达定理：

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$有三个零点x_1,x_2,x_3，则$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$，

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$，$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$

10．某高校有在校学生9000人，其中男生4000人，女生5000人，为了解学生每天自主学习中国古典文学的时间，随机调查了40名男生和50名女生，其中每天自主学习中国古典文学的时间超过3小时的学生称为“古文迷”，否则为“非古文迷”，调查结果如下表，则

	古文迷	非古文迷
男生	20	20
女生	40	10

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P(K^2\ge k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.05	0.025	0.010
k_0	0.455	0.708	1.321	3.841	5.024	6.635

A．该校某位学生为古文迷的概率的估计值为0.6

B．随机调查的男女生人数符合分层抽样的抽样方法

C．有99%的把握认为学生是否为“古文迷”与性别有关系

D．没有99%的把握认为学生是否为“古文迷”与性别有关系

【答案】BC

【解析】 $\dfrac{60}{9000}=\dfrac{1}{150}\ne 0.6$，A错.

$4000:5000=40:50$，B对.

$K^2=\dfrac{90(20\times10-20\times40)^2}{60\times30\times40\times50}=9>6.635$，C对，D错，选BC.

11．设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边为a,b,c，则下列说法正确的有

A．若$\sin A\cdot\sin B>\sin^2 C$，则$C<\dfrac{\pi}{3}$

B．若$\sin A+\sin B>2\sin C$，则$C<\dfrac{\pi}{3}$

C．若$C>\dfrac{\pi}{2}$，则可能有$a^4+b^4=c^4$

D．若$C<\dfrac{\pi}{2}$，则可能有$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\dfrac{2}{c}$

【答案】ABD

【解析】 $\sin A\sin B>\sin^2 C$，则$ab>c^2$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\dfrac{a^2+b^2-ab}{2ab}$

$\geq\dfrac{2ab-ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore C<\dfrac{\pi}{3}$，A 对.

$\sin A+\sin B>2\sin C$，$\therefore a+b>2c$，$c<\dfrac{a+b}{2}$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\dfrac{a^2+b^2-\dfrac{(a+b)^2}{4}}{2ab}=\dfrac{4a^2+4b^2-(a^2+2ab+b^2)}{8ab}$

$=\dfrac{3a^2+3b^2-2ab}{8ab}\geq\dfrac{6ab-2ab}{8ab}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore C<\dfrac{\pi}{3}$，B 对.

$C>\dfrac{\pi}{2}$，则$a^2+b^2-c^2<0$，即$a^2+b^2<c^2$，则$a^4+b^4+2a^2b^2<c^4$与$a^4+b^4>c^4$矛盾，

C 错.

$C<\dfrac{\pi}{2}$，则$a^2+b^2>c^2$，不妨设$a=2,b=\sqrt{3},c=1$，则$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}<2$，D 对.选 ABD.

12．已知AB为圆柱的母线，BD为圆柱底面圆的直径，且$AB=BD=4$，O为AD的中点，点C在底面圆周上运动（不与点B,D重合），则

A．平面$ABC\perp$平面OCD

B．当$BC=CD$时，点A沿圆柱表面到点C的最短距离是$\sqrt{16+\pi^2}$

C．三棱锥$D-OBC$的体积最大值是$\dfrac{16}{3}$

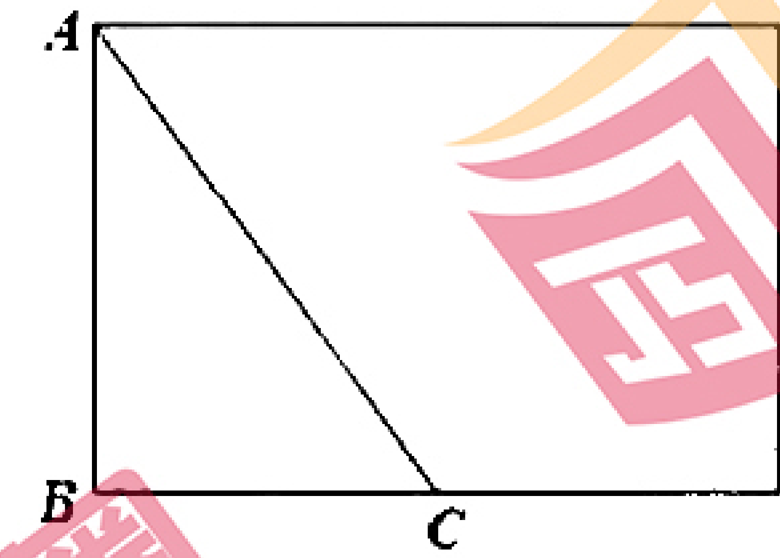
D．AC与平面ABD所成角的正切值的最大值是$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

【答案】AB

【解析】C在以BD为直径的圆上，$\therefore CD\perp CB$，又$\because AB\perp CD$，$\therefore CD\perp$面ABC，

$\therefore$面$ABC\perp$面OCD，A对.

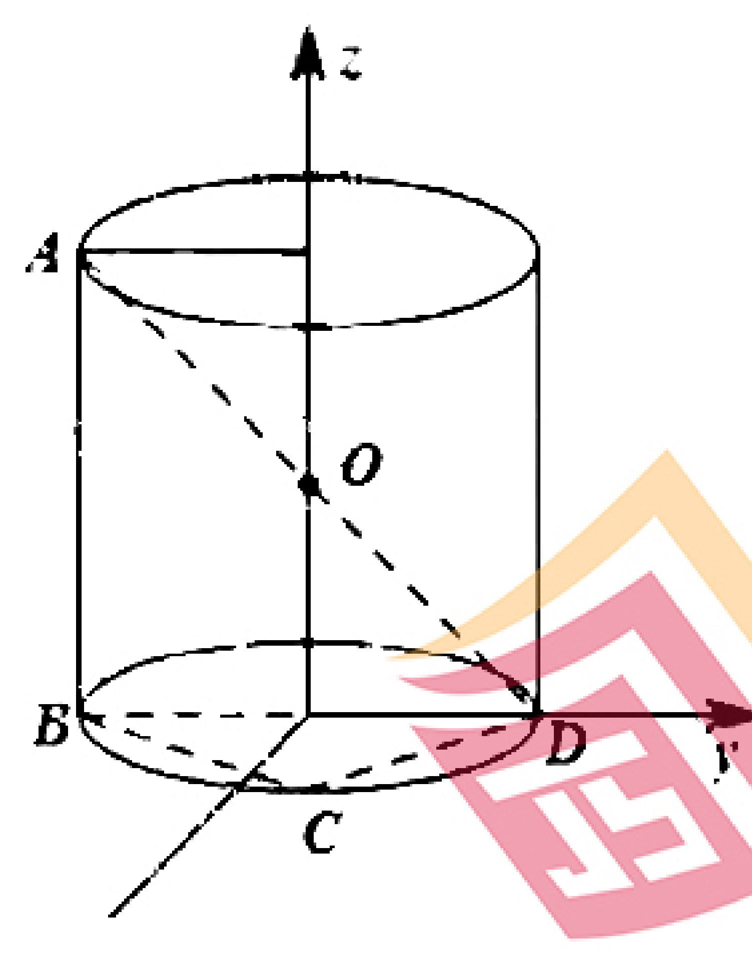
$BC=CD$时，C为半圆中点，展开后$BC=\pi$，$\therefore AC_{\min}=\sqrt{16+\pi^2}$，B对.



O到面BCD的距离为2，$S_{\triangle BCD}\le\frac{1}{2}\times4\times2=4$，$\therefore V_{O-BCD}\le\frac{1}{3}\times4\times2=\frac{8}{3}$，C错.

BD为直径作$EF\perp BD$为另一条直径，EF为面ABD的直径，以BD中点建系，面ABD的法向量的$\vec{n}=(1,0,0)$，$A(0,-2,4)$，$C(4\cos\theta,4\sin\theta,0)$，$\overrightarrow{AC}=(4\cos\theta,4\sin\theta+2,-4)$

设AC与面ABD所成的角为α



$$\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{4|\cos\theta|}{\sqrt{16\cos^2\theta+16\sin^2\theta+16\sin\theta+4+16}}=\frac{4|\cos\theta|}{\sqrt{16\sin\theta+36}}$$

$$=2\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{4\sin\theta+9}}=2\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta}{4\sin\theta+9}}$$

$4\sin\theta+9=t$，$t\in[5,13]$，$\sin\alpha=2\sqrt{\frac{-t^2+18t-65}{16t}}\in\left[0,\frac{1}{2}\sqrt{18-2\sqrt{65}}\right]$

$\sin\alpha_{\max}=\frac{1}{2}(\sqrt{13}-\sqrt{15})$，$\tan\alpha$最大值不是$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，D错，选AB.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．将 5 本不同的书分发给 4 位同学，其中甲、乙两本书不能同时发给某一位同学，每位同学都发到书，每本书只能给一位同学，则不同的分配方案数为________.（用数字作答）

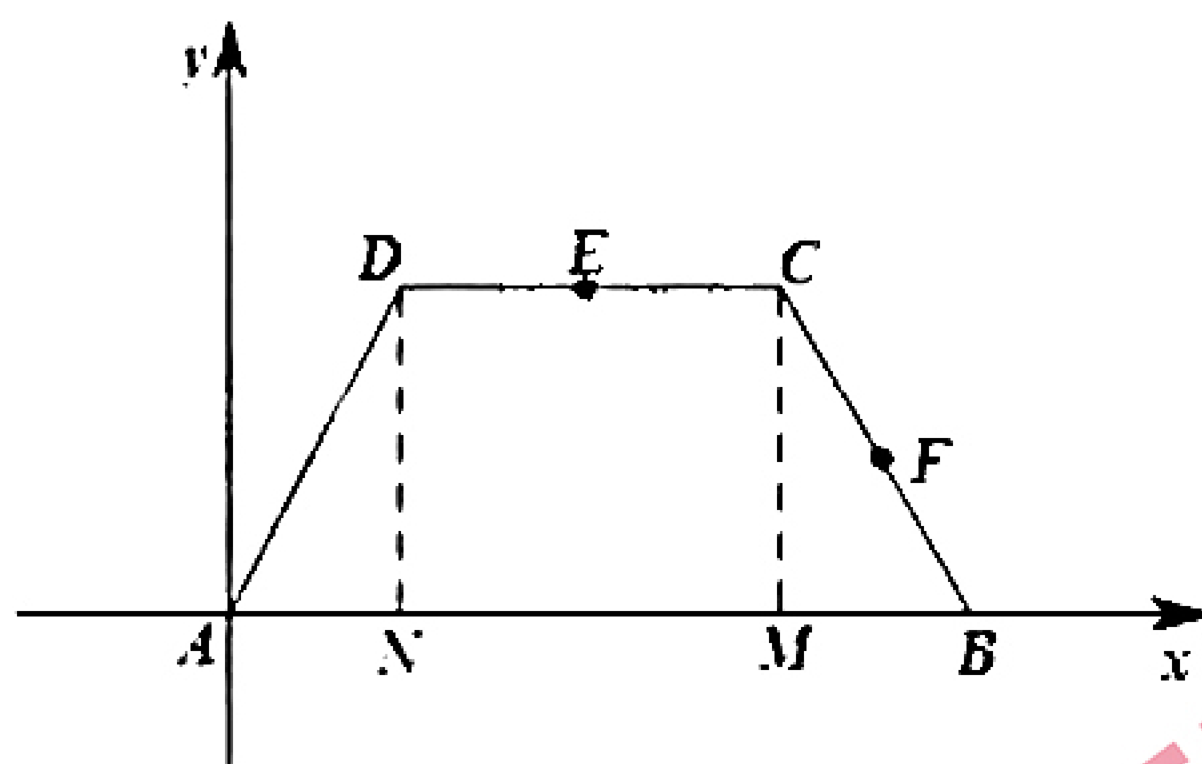
【答案】 216

【解析】 5 本书送 4 人共有 $C_5^2A_4^4=240$，甲，乙送一人有 $A_4^4=24$ 个结果，$240-24=216$.

14．在提醒 $ABCD$ 中，已知 $AB\parallel DC$，$AB=2$，$AD=BC=1$，$\angle ABC=60°$，点 E,F 分别在线段 BC 和 CD 上，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最大值为________.

【答案】 3

【解析】 如图建系，$B(2,0)$，$BM=\frac{1}{2}=AN$，$\therefore C\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$



设 $E\left(m,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),m\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，令 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\therefore F\left(2-\frac{\lambda}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right),\lambda\in[0,1]$，

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=m\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{3}{4}\lambda=2m+\left(\frac{3}{4}-\frac{m}{2}\right)\lambda\le 2m+\frac{3}{4}-\frac{m}{2}=\frac{3}{2}m+\frac{3}{4}$$

$$\le\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3.$$

15．若关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{x-2}=t$ 有两个不相等的实数根，则实数 t 的取值范围是________.

【答案】 $(0,+\infty)$

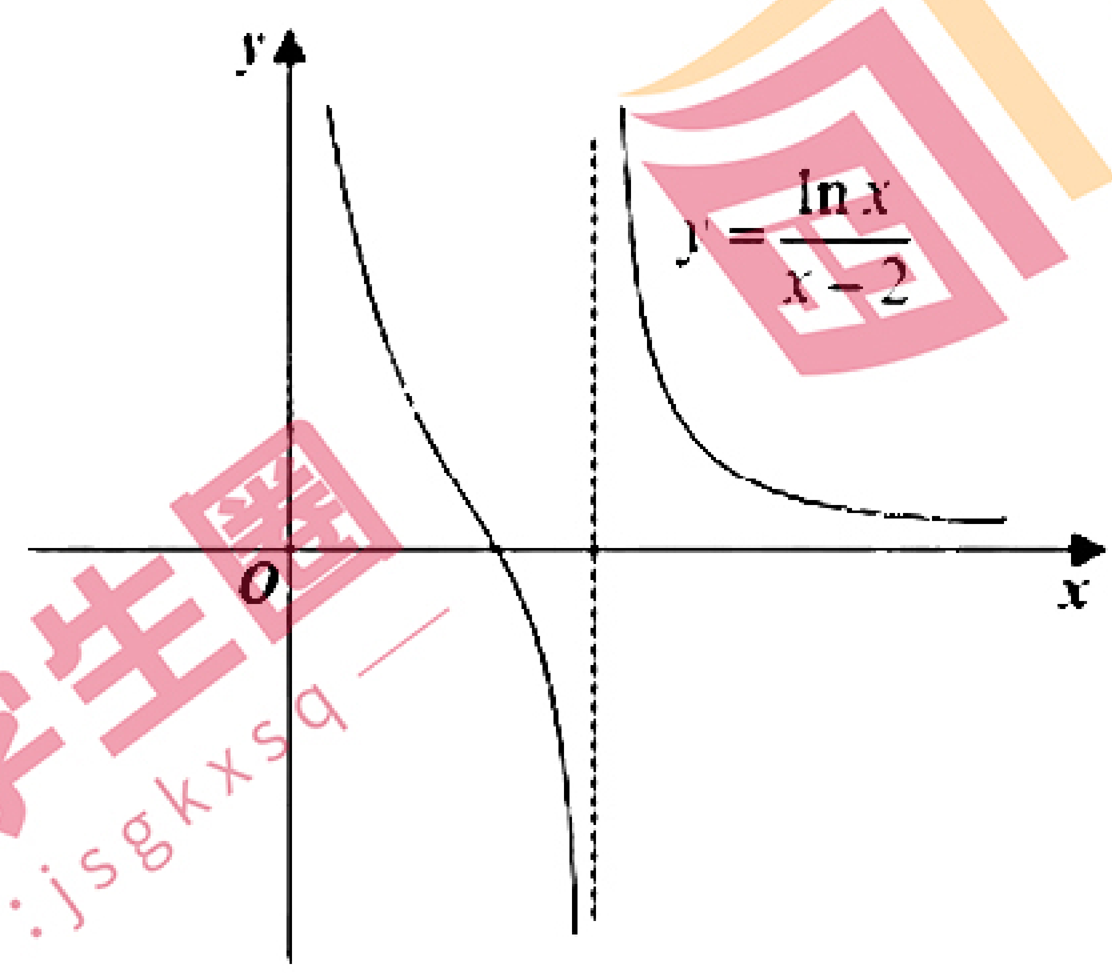
【解析】 $f(x)=\frac{\ln x}{x-2}$，$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-2)-\ln x}{(x-2)^2}=\frac{1-\frac{2}{x}-\ln x}{(x-2)^2}$

$g(x)=1-\frac{2}{x}-\ln x$，$g'(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2-x}{x^2}=0,x=2$，

$g(x)$在$(0,2)\nearrow$，$(2,+\infty)\swarrow$，$g(x)_{\max}=g(2)=1-1-\ln 2<0$，$\therefore f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$在$(0,2)\swarrow$，$(2,+\infty)\swarrow$，$0<x<1$时，$f(x)>0$；$x>2$时，$f(x)>0$；

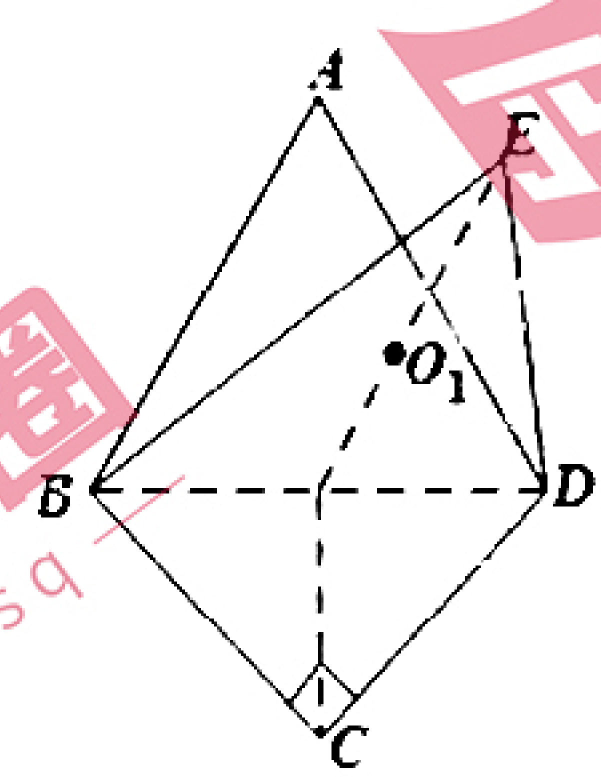
$1<x<2$，$f(x)<0$，$\therefore f(x)=t$有两个根$\Leftrightarrow t>0$.



16.在平面凸四边形$ABCD$中，$CB=CD=\sqrt{2}$，$AB=AD$，且$\angle BAD=60°$，$\angle BCD=90°$，将四边形$ABCD$沿对角线BD折起，使点A到达点E的位置.若二面角$E-BD-C$的大小范围是$\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，则三棱锥$E-BCD$的外接球表面积的取值范围是________.

【答案】$\left[\frac{16\pi}{3},\frac{28\pi}{3}\right]$

【解析】$CB=CD=\sqrt{2}$，$\angle BCD=90°$，$\therefore BD=AB=AD=2$，



利用双距离单交线公式，$\triangle EBD$外心O_1到BD的距离$m=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\triangle BCD$的外心O_2到BD的距离$n=0$，$E-BD-C$交线$l=BD=2$，

设二面角$E-BD-C$平面角为θ，外接球半径为R，

$\therefore R^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{l^2}{4}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\sin^2\theta}+1$，$\because \theta\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$

$\therefore \dfrac{1}{4}\le\sin^2\theta\le 1$，$\therefore \dfrac{4}{3}\le R^2\le\dfrac{7}{3}$

$\therefore$三棱锥 $E-BCD$ 外接球的表面积 $S_{表}=4\pi R^2\in\left[\dfrac{16\pi}{3},\dfrac{28\pi}{3}\right]$

应填：$\left[\dfrac{16\pi}{3},\dfrac{28\pi}{3}\right]$

注：第 16 题考得是进阶班第二讲外接球的公式，双距离单交线公式的运用.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）某校数学建模学生社团进行了一项实验研究，采集了 x、y 的一组数据如下表所示：

x	2	3	4	5	6	7
y	52.5	45	40	30	25	17.5

该社团对上述数据进行了分析，发现 y 与 x 之间具有线性相关关系.

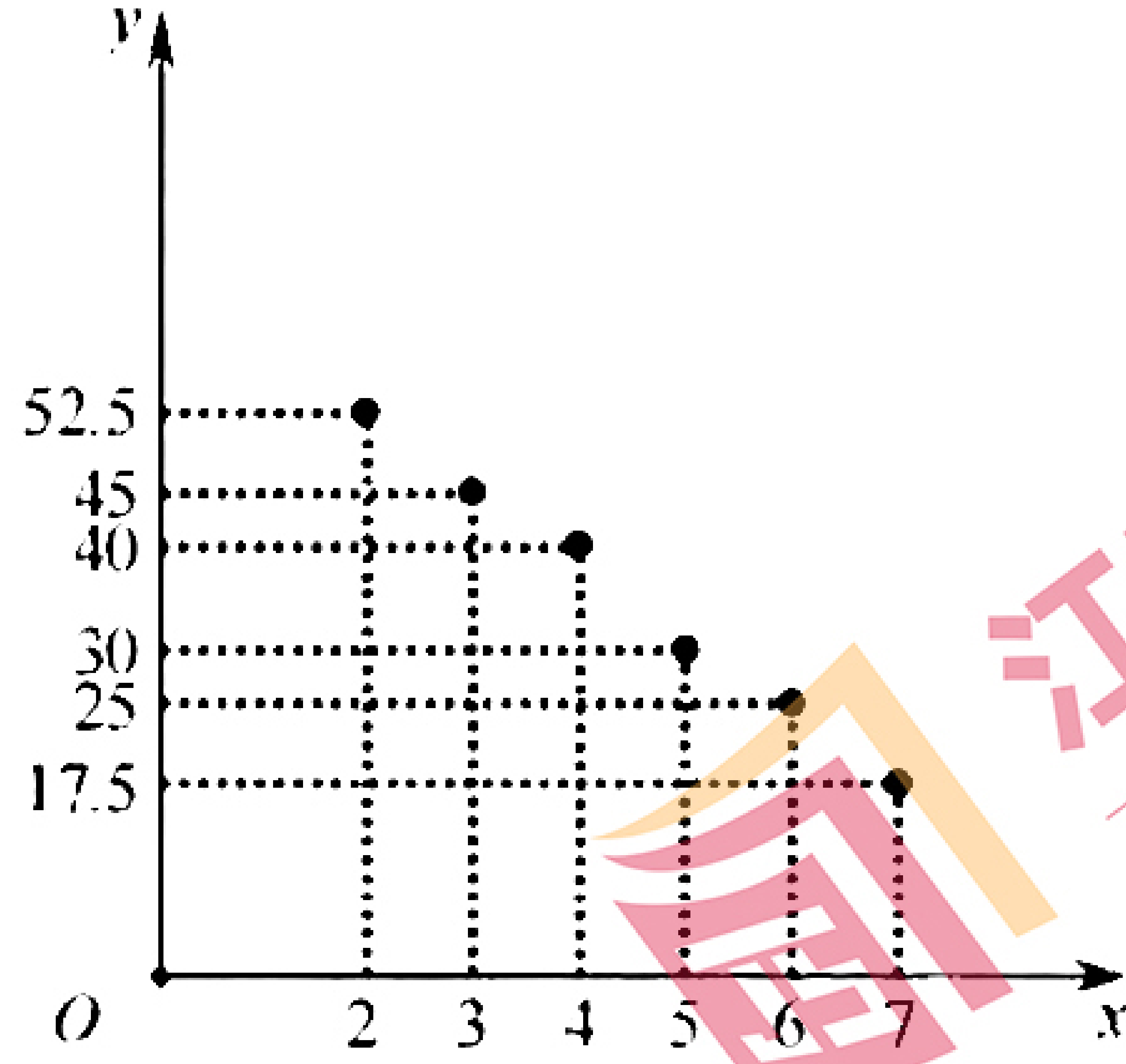
附：在线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+bx$ 中，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n(\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，其中 $\overline{x},\overline{y}$ 为样本平均值.

（1）画出表中数据的散点图，并指出 y 与 x 之间的相关系数 r 是正还是负；

（2）求出 y 关于 x 的线性回归方程，并写出当 $x=9$ 时，预测数据 y 的值.

【解析】

（1）r 是负.



（2）$\bar{x}=\dfrac{2+3+4+5+6+7}{6}=4.5$，$\bar{y}=\dfrac{52.5+45+40+30+25+17.5}{6}=35$

$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=882.5$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=139$

$$\therefore \hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}=\frac{822.5-6\times4.5\times35}{139-6\times4.5^2}=-7$$

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=35-(-7)\times4.5=66.5$，$\therefore y$关于$x$线性回归方程为$\hat{y}=66.5-7\hat{x}$

当$x=9$时，$y=3.5$.

18.（12分）已知$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，点M,N在边BC上，AM，AN三等分$\angle BAC$，M靠近B，N靠近C.

（1）若$AN=2MN$，且$AB=4$，求BM；

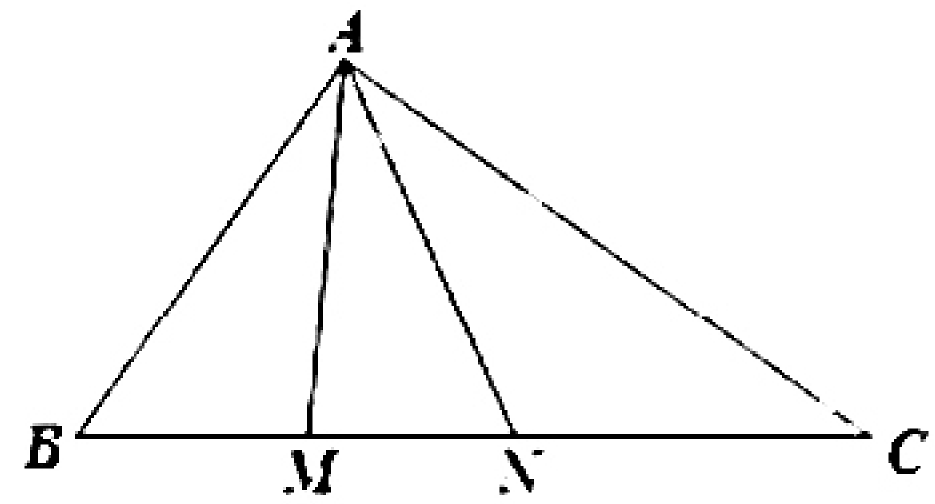
（2）若$BC=11BM$，求$\dfrac{BN}{BM}$.

【解析】

（1）$\because \angle BAM=\angle MAN=\angle NAC=30°$

在$\triangle AMN$中，$\dfrac{AN}{\sin\angle AMN}=\dfrac{MN}{\sin30°}$，$\because AN=2MN$

$\therefore \sin\angle AMN=1$，$\therefore \angle AMN=90°$，$\therefore BM=4\sin30°=2$.



（2）设$BM=t$，$\therefore BC=11BM=11t$，故$CM=10t$

在△ACM中，由正弦定理$\Rightarrow \dfrac{AM}{\sin(90^\circ-B)}=\dfrac{CM}{\sin 60^\circ}$

$\Rightarrow AM=10t\cos B\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{20t}{\sqrt{3}}\cos B$

在△$ABMB$中，由正弦定理$\Rightarrow \dfrac{AM}{\sin B}=\dfrac{BM}{\sin 30^\circ}\Rightarrow AM=2t\sin B$

$\therefore \dfrac{20t\cos B}{\sqrt{3}}=2t\sin B$，$\therefore \tan B=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

在△AMN中，$\dfrac{AM}{\sin\angle ANM}=\dfrac{MN}{\sin 30^\circ}\Rightarrow\dfrac{AM}{\sin(120^\circ-B)}=\dfrac{MN}{\sin 30^\circ}$

$\therefore MN=\dfrac{t\sin B}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B}=\dfrac{20t}{13}$

$\therefore \dfrac{BN}{BM}=\dfrac{t+\dfrac{20t}{13}}{t}=\dfrac{33}{13}$

19.（12分）已知函数$f(x)=\dfrac{a}{2}x^2+(2a-1)x-2\ln x$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）对于$\forall x\in[1,e]$，$\exists b\in[2,+\infty)$，使得$f(x)\geq b$，求实数a的取值范围.

【解析】

（1）$f'(x)=ax+2a-1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{ax^2+(2a-1)x-2}{x}=\dfrac{(ax-1)(x+2)}{x}$

①当$a\leq 0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上↙；

②当$a>0$时，令$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{a}$.

且当$0<x<\frac{1}{a}$时，$f'(x)<0, f(x)\swarrow$；当$x>\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0, f(x)\nearrow$.

（2）$f(x)\geq b_{\min}=2$对$\forall x\in[1,e]$恒成立.

①当$a<1$时，$\because f(1)=\frac{5a}{2}-1<2$，舍去.

②当$a\geq 1$时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$在$[1,e]$上$\nearrow$，故只需$f(1)=\frac{5a}{2}-1\geq 2\Rightarrow a\geq\frac{6}{5}$符合.

综上：$a\geq\frac{6}{5}$.

20.（12分）盒子里放着三张卡片，一张卡片两面都是红色，一张卡片两面都是黑色，剩下的一张卡片一面是红色一面是黑色.

（1）随机抽出一张卡片并随机展示它一面的颜色.假设展示的这一面的颜色是红色，那么剩下一面的颜色也是红色的概率是多少？

（2）随机抽出一张卡片并随机展示它一面的颜色，放回后，再随机抽出一张卡片并随机展示它一面的颜色.两次展示的颜色中，黑色的次数记为X，求随机变量X的分布和数学期望.

【解析】

（1）记事件A为展示的一面颜色是红色，事件B为剩下一面的颜色也是红色

$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{3}$.

$\therefore P(B|A)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

（2）随机抽出一张卡片，颜色是黑色的概率为$1-P(A)=\frac{1}{2}$，

$\therefore X\sim B\left(2,\frac{1}{2}\right)$的二项分布$X$的所有可能取值为$0,1,2$

$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，$P(X=1)=C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{1}{4}$

X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

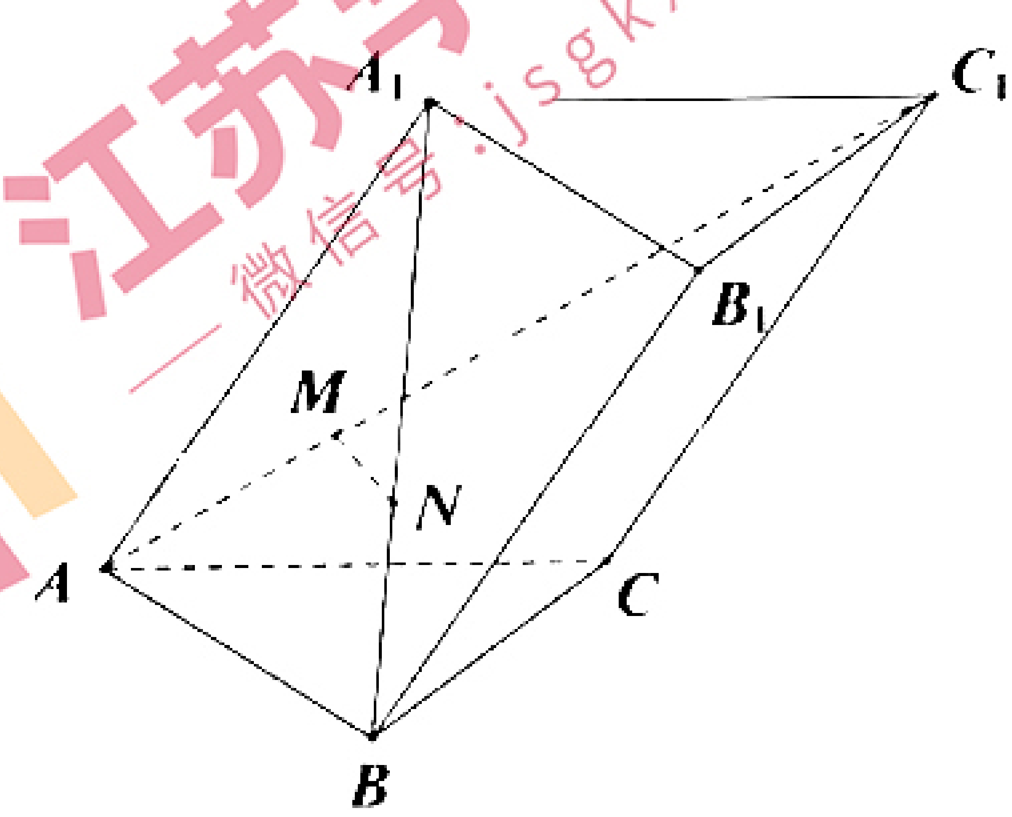
$E(X)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$或由$E(X)=nP=2\times\frac{1}{2}=1$.

21．（12 分）已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$AB=AC=2$，$AA_1=3$，$\angle A_1AB=\angle A_1AC=\angle BAC=60^\circ$，$M,N$ 为线段 AC_1，BA_1 上的点，且满足 $\frac{AM}{AC_1}=\frac{BN}{BA_1}=t(0<t<1)$.

（1）求证：MN // 平面 ABC；

（2）求证：$BB_1\perp BC$；

（3）设平面 $MNA\cap$ 平面 $ABC=l$，已知二面角 $M-l-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 t 的值.



【解析】

（1）过 M,N 分别作 ME // CC_1 交 AC 于点 E，NF // A_1A 交 AB 于点 F

$\therefore\frac{ME}{CC_1}=\frac{AM}{AC_1}$ 且 $\frac{NF}{AA_1}=\frac{BN}{BA_1}$，$\because\frac{AM}{AC_1}=\frac{BN}{BA_1}$，$\therefore\frac{ME}{CC_1}=\frac{NF}{AA_1}$

$\therefore ME\overset{//}{=}NF$，$\therefore$ 四边形 $MEFN$ 为平行四边形，$\therefore MN$ // EF，$\therefore MN$ // 平面 ABC.

（2）$\because BB_1=3$，$BC=2$，$\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}$

$\therefore \left|\overrightarrow{B_1C}\right|^2=4+4+9-2\times2\times2\times\frac{1}{2}-2\times2\times3\times\frac{1}{2}+2\times2\times3\times\frac{1}{2}=13$，

$\therefore \left|B_1C\right|=\sqrt{13}$，$\therefore BB_1^2+BC^2=B_1C^2$，$\therefore BB_1\perp BC$.

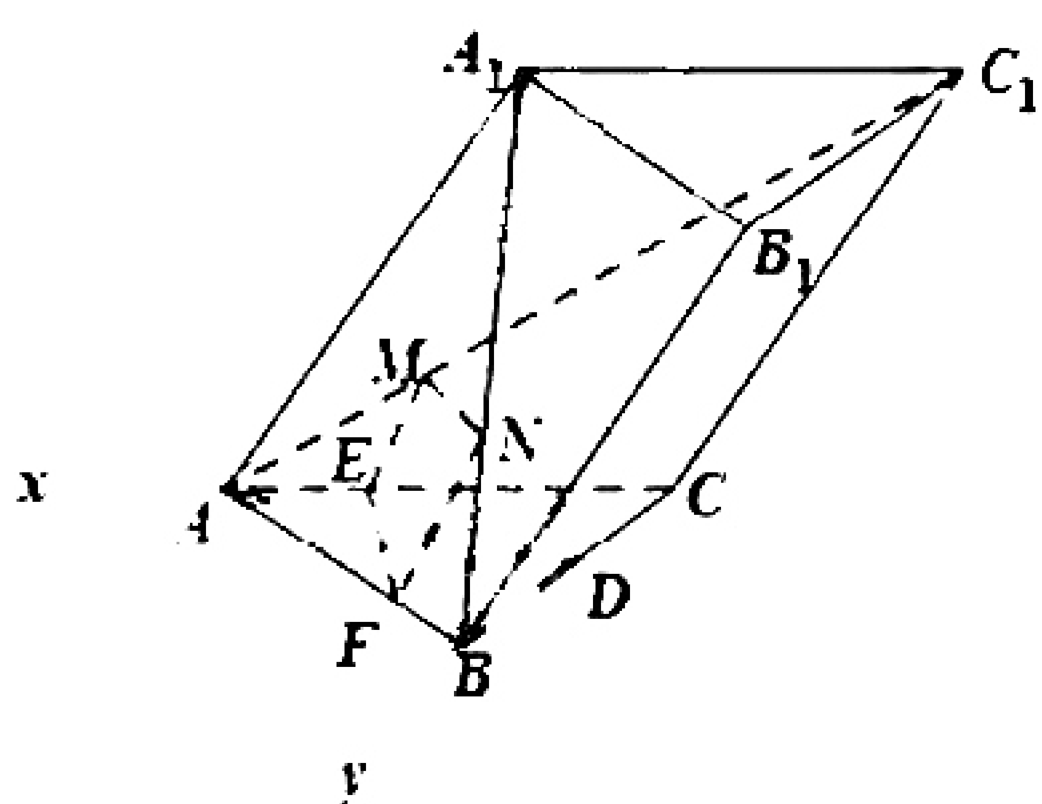
（3）取 BC 中点 D，连接 A_1D, AD，$\because\triangle ABC$ 为等边三角形且 $AB=2$，$\therefore AD=\sqrt{3}$.

在 $\triangle A_1AB$ 中，$A_1B=\sqrt{4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$，由 $\triangle A_1AB\cong\triangle A_1AC$，$\therefore A_1C=\sqrt{7}$

在 $\triangle AA_1C$ 中，D 为 BC 中点，$\therefore A_1D\perp BC$，$\therefore A_1D=\sqrt{7-1}=\sqrt{6}$，

$\therefore A_1D^2+AD^2=AA_1^2$，$\therefore A_1D\perp AD$

如图，分别以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA_1}$ 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系.



$\therefore A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,-1,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{6})$，$C_1(-\sqrt{3},-1,\sqrt{6})$.

$\because \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AC_1}\Rightarrow M(\sqrt{3}-2\sqrt{3}t,-t,\sqrt{6}t)$，又 $\because \overrightarrow{BN}=t\overrightarrow{BA_1}$，$\therefore N(0,1-t,\sqrt{6}t)$

$\therefore \overrightarrow{MN}=(2\sqrt{3}t-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AM}=(-2\sqrt{3}t,-t,\sqrt{6}t)$，

设平面 AMN 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$$\begin{cases}(2\sqrt{3}t-\sqrt{3})x+y=0\\-2\sqrt{3}tx-ty+\sqrt{6}tz=0\end{cases}\Rightarrow \vec{n_1}=\left(1,\sqrt{3}-2\sqrt{3}t,\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}t\right)$$

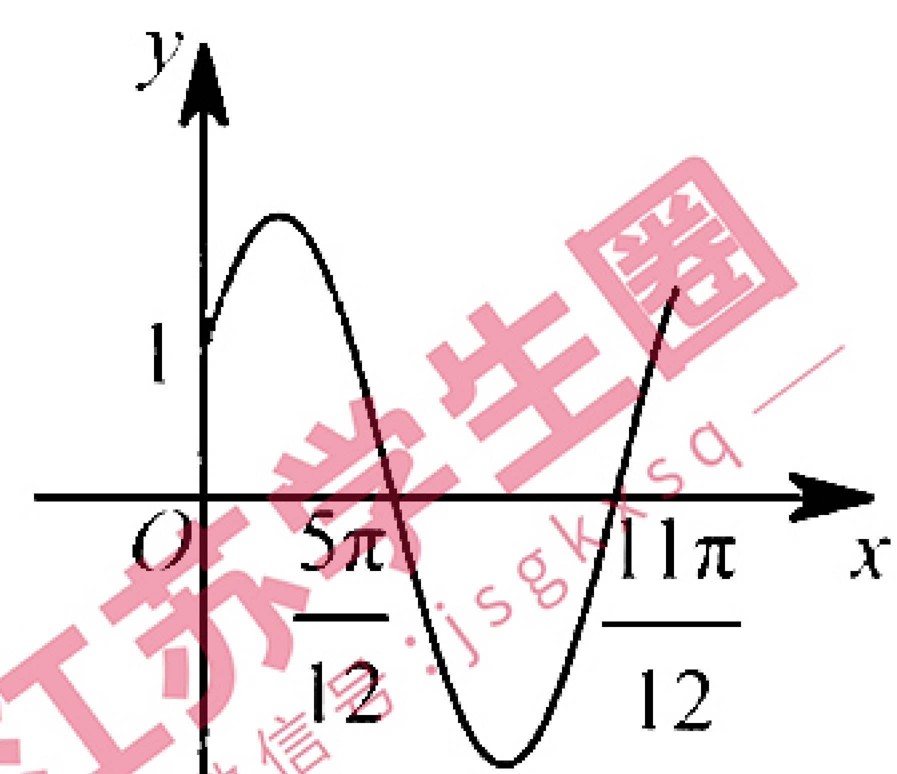
而平面 ABC 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，$\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|$

$=\dfrac{3-2t}{\sqrt{28t^2-36t+17}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$t=\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{7}{22}$

22．（12分）已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.将函数$f(x)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度得到函数$g(x)$的图象，再将图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），得到函数$h(x)$的图象.

（1）求函数$f(x)$的解析式，并直接写出函数$g(x)$，$h(x)$的解析式；

（2）若$F(x)=g(x)+ah\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$在$(0,n\pi)(n\in\mathbf{N}^*)$内恰有2023个零点，求实数$a$与正整数$n$的值.



【解析】

（1）由图象知$f(x)$周期$T=\pi$，$\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，且$2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$

$\Rightarrow\varphi=k\pi-\dfrac{5\pi}{6}$，$\because\varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

再由$f(0)=1\Rightarrow A\sin\varphi=1\Rightarrow A=2$，$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

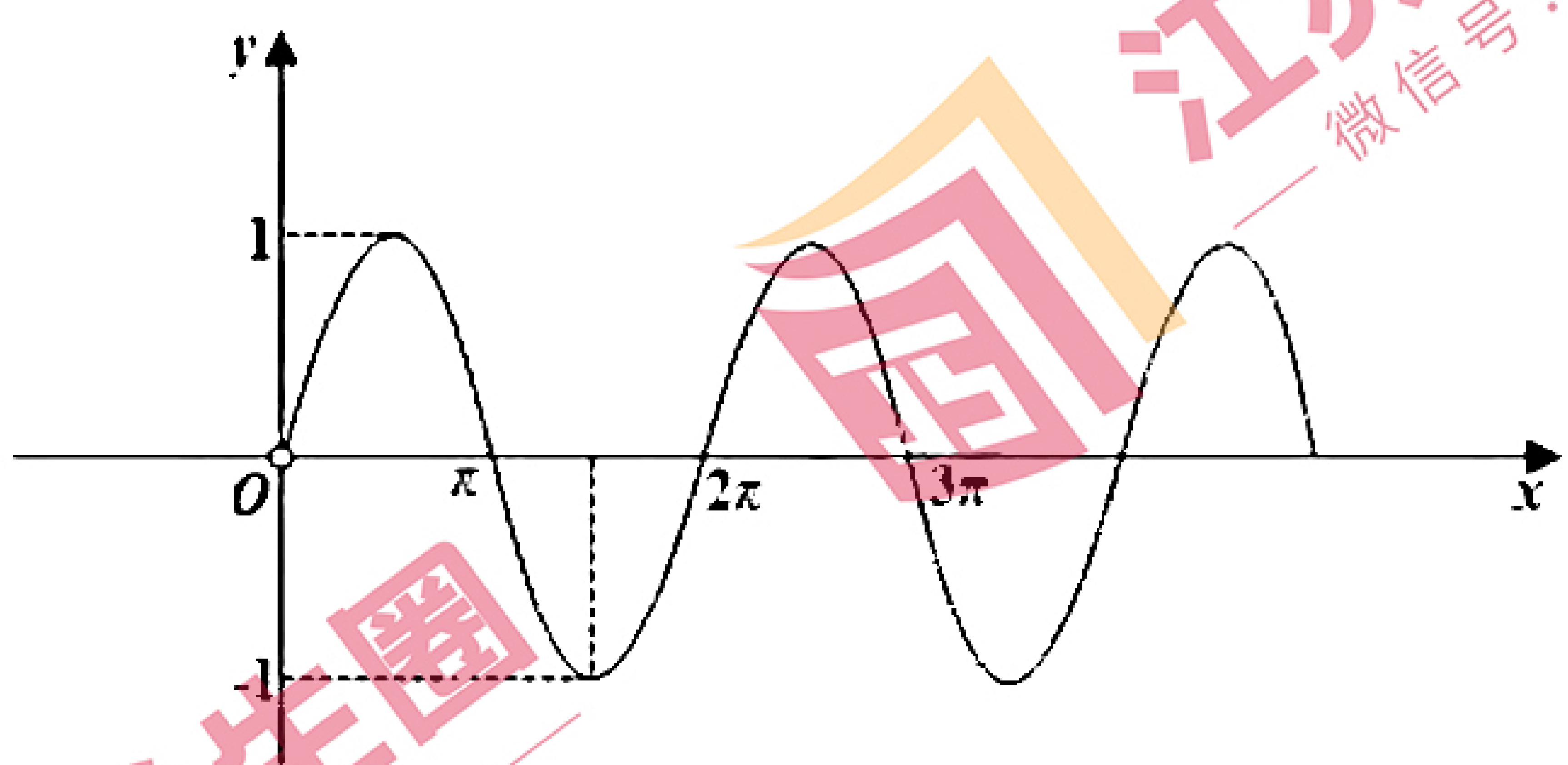
$g(x)=2\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos2x$，$h(x)=2\cos x$.

（2）$F(x)=2\cos2x+a\cdot2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=2(1-2\sin^2x)-2a\sin x=0$

$\Rightarrow 2\sin^2 x + a\sin x - 1 = 0$

令 $\sin x = t$ ，$\therefore 2t^2 + at - 1 = 0$ 两根记为 t_1, t_2 ，其中 $t_1 < 0 < t_2$ ，

作出 $y = \sin x$ 在 $x \in (0, n\pi)$ 上的大致图象如下：



显然 t_1, t_2 中有一个为 -1 或 1.

①当 $t_1 = -1$ 时 $a = 1$ ，此时 $t_2 = \frac{1}{2}$ ，当 n 为偶数时，$\sin t = \frac{1}{2}$ 有 n 个交点，

$\sin t = -1$ 有 $\frac{n}{2}$ 个交点，此时 $n + \frac{n}{2} = 2023$ ，$n \in \mathbf{Z}$ 舍去.

当 n 为奇数时，$\sin t = \frac{1}{2}$ 有 $n+1$ 个解，$\sin t = -1$ 有 $\frac{n-1}{2}$ 个解，有 $\frac{3n+1}{2} = 2023$

$\Rightarrow n \in \mathbf{Z}$ ，舍去.

②当 $t_2 = 1$ 时，$a = -1$ ，此时 $t_1 = -\frac{1}{2}$.

当 n 为偶数时，$\sin t = 1$ 有 $\frac{n}{2}$ 个交点，$\sin t = -\frac{1}{2}$ 有 n 个交点，

此时 $\frac{3n}{2} = 2023$ ，$n \in \mathbf{Z}$ 舍去.

当 n 为奇数时，$\sin t = 1$ 有 $\frac{n+1}{2}$ 个解，$\sin t = -\frac{1}{2}$ 有 $n-1$ 个解.

$\therefore \frac{n+1}{2} + n - 1 = 2023 \Rightarrow n = 1349$ ，故 $a = -1$ ，$n = 1349$.