

高 2024 届期中考试数学试卷

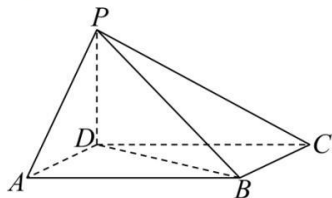
总分：150 分 考试时间：120 分钟

一、单项选择题：共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

- 已知集合 $A = \{x \mid |x-2| < 1\}$, $B = \{x \mid \log_2 x < 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 A. $(0,3)$ B. $(1,2)$ C. $(-\infty,3)$ D. $(0,2)$
 - 已知复数 z 满足 $\frac{3}{z} + z + 2 = 0$, 则 $\left|\frac{3}{z}\right| =$ ()
 A. 3 B. 1 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$
 - 已知 $2\sin\alpha = 3 + 2\sqrt{3}\cos\alpha$, 则 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) =$ ()
 A. $-\frac{1}{8}$ B. $-\frac{7}{8}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{7}{8}$
 - 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 2$, 前 n 项和为 S_n , 且 $a_1, 2a_2, 4a_3$ 成等差数列, 则 ()
 A. $S_{n+1} = \frac{3}{2}S_n$ B. $S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + 2$
 C. $S_{n+1} = a_n + 1$ D. $S_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$
 - 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 若 $PA = 2AB$, 则平面 ABP 与平面 CDP 夹角的余弦值为 ()
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - 某款对战游戏, 总有一定比例的玩家作弊该游戏每 10 个人组成一组对局, 若一组对局中有作弊玩家, 则认为这组对局不公平. 现有 50 名玩家, 其中有 2 名玩家为作弊玩家, 一次性将 50 名玩家平均分为 5 组, 则 5 组对局中, 恰有一组对局为不公平对局的概率为 ()
 A. $\frac{7}{20}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{9}{49}$ D. $\frac{1}{5}$
 - 设函数 $f(x) = \frac{(e^x - a)^2}{16} + (x-a)^2$ ($x \in \mathbf{R}$), 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq \frac{1}{17}$ 有解, 则实数 a 的值为 ()
 A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{17}$ D. $\frac{1}{18}$
 - 已知 $a = \frac{97}{100}$, $b = \cos \frac{1}{5}$, $c = \frac{51}{10} \sin \frac{1}{5}$, 则 ()
 A. $b > a > c$ B. $c > b > a$
 C. $a > b > c$ D. $a > c > b$
- 二、多项选择题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。
- 设 z 为复数, 则下列命题中正确的是 ()
 A. $|z|^2 = z\bar{z}$ B. $z^2 = |z|^2$
 C. 若 $|z|=1$, 则 $|z+i|$ 的最大值为 2 D. 若复数 $\bar{z}_1 = z_2$, 则 $|zz_1| = |zz_2|$
 - 在 $\triangle ABC$ 中, 下列说法正确的有 ()
 A. 若 $A > B$, 则 $\sin A > \sin B$ 公众号: 全元高考 go. 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $\sin B > \cos A$
 C. 若 $a^2 \tan B = b^2 \tan A$, 则 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形

D. 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 且 $AB=3$, $AC=5$, $\cos C = \frac{13}{14}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

11. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, $AB = 2AD = 2PD$, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 则 ()



A. $PA \perp BD$

B. PB 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$

C. 异面直线 AB 与 PC 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. 平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x < 2 \\ \sin(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{6}), & 2 \leq x \leq 12 \end{cases}$, 若存在实数 a 使得方程 $f(x) = a$ 有四个互不相等的实数根, 分别为

x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则下列说法正确的有 ()

A. $0 < a < \frac{1}{2}$

B. $2x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{2}$

C. $f(\frac{7}{2}) < a$

D. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ 的取值范围为 $(\frac{126}{155}, \frac{2+9\sqrt{2}}{6}]$

三、填空题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (α 为锐角), 则 $\sin \alpha =$ _____.

14. 已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_6 = 2a_3$, 则 $\frac{S_6}{S_2} =$ _____.

15. 在一次投篮比赛中, 甲、乙、丙三人投篮命中的概率分别为 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 若每次投球三人互不影响, 则在一次投球中, 三人中至少有两人投篮命中的概率为 _____.

16. 已知对任意 x , 都有 $e^{3x} - a - 1 \geq \frac{1 + \ln x}{x}$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题: 共 70 分。

17. (10 分) 已知集合 $A = \{x | m-1 \leq x \leq 2m+3\}$, 不等式 $|x| \leq 2$ 的解集为 B .

(1) 当 $m=1$ 时, 求 $A \cup B, (\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$; 公众号: 全元高考

(2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值范围.

公众号: 全元高考

18. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n \neq 0, \frac{n^2 + n + 1}{S_n} = \frac{n^2 + n + 4 - S_n}{3}$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 2^{a_n}$, 求数列 $\{(a_n - 1)b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

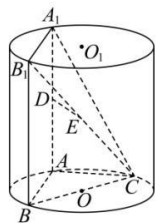
19. (12分) 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$. 函数 $f(x)$ 的最大值为 2, 且_____.

请从以下 3 个条件中任选一个, 补充在上面横线上, ① $f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数; ② 当 $x = 0$ 时 $f(x) = \sqrt{3}$; ③ $x = \frac{\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴. 并解答下列问题:

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $f(A) = \sqrt{3}, c = 3, \triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$, 求 a 的值.

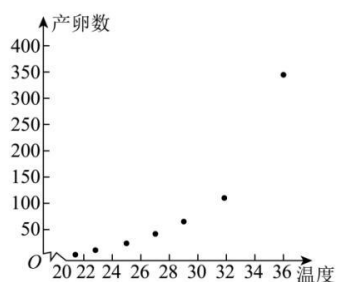
20. (12分) 如图, AA_1, BB_1 为圆柱 OO_1 的母线, BC 是底面圆 O 的直径, D, E 分别是 AA_1, CB_1 的中点, $DE \perp$ 面 CBB_1 .



(1)证明: $DE \parallel$ 平面 ABC ;

(2)若 $BB_1 = BC$, 求平面 A_1B_1C 与平面 BDC 的夹角余弦值.

21. (12分) 红蜘蛛是柚子的主要害虫之一, 能对柚子树造成严重伤害, 每只红蜘蛛的平均产卵数 y (个) 和平均温度 x ($^{\circ}\text{C}$) 有关, 现收集了以往某地的 7 组数据, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



参考数据 ($z = \ln y$)					
$\sum_{i=1}^7 x_i^2$	$\sum_{i=1}^7 x_i y_i$	$\sum_{i=1}^7 x_i z_i$	\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}
5215	17713	714	27	81.3	3.6

(1) 根据散点图判断, $y = bx + a$ 与 $y = ce^{ax}$ (其中 $e = 2.718 \dots$ 为自然对数的底数) 哪一个更适合作为平均产卵数 y (个)

关于平均温度 x ($^{\circ}\text{C}$) 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(2) 由 (1) 的判断结果及表中数据, 求出 y 关于 x 的回归方程. (计算结果精确到 0.1)

附: 回归方程中 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$

(3) 根据以往每年平均气温以及对果园年产值的统计, 得到以下数据: 平均气温在 22°C 以下的年数占 60%, 对柚子产量影响不大, 不需要采取防虫措施; 平均气温在 22°C 至 28°C 的年数占 30%, 柚子产量会下降 20%; 平均气温在 28°C 以上的年数占 10%, 柚子产量会下降 50%. 为了更好的防治红蜘蛛虫害, 农科所研发出各种防害措施供果农选择.

在每年价格不变, 无虫害的情况下, 某果园年产值为 200 万元, 根据以上数据, 以得到最高收益 (收益 = 产值 - 防害费用) 为目标, 请为果农从以下几个方案中推荐最佳防害方案, 并说明理由.

方案 1: 选择防害措施 A, 可以防止各种气温的红蜘蛛虫害不减产, 费用是 18 万;

方案 2: 选择防害措施 B, 可以防治 22°C 至 28°C 的蜘蛛虫害, 但无法防治 28°C 以上的红蜘蛛虫害, 费用是 10 万;

方案 3: 不采取防虫害措施.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + \frac{x^2}{2}$.

(1) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, 比较 $f(x)$ 与 x 的大小;

(2) 若函数 $g(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$, 且 $f\left(\frac{a}{e^2}\right) = g(b) - 1$ ($a > 0, b > 0$), 证明: $f(b^2) + 1 > g(a+1)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

