

## 2023-2024 学年度第一学期期中学业水平检测 高三数学试题

本试题卷共 4 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。

3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $N = \{x | y = \ln(6-x)\}$ , 则  $M \cap N =$   
A.  $\{2, 4, 6, 8, 10\}$  B.  $\{2, 4, 6, 8\}$  C.  $\{2, 4, 6\}$  D.  $\{2, 4\}$
2. 已知平面向量  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (3, 4)$ ,  $\vec{c} = (t, t+2)$ , 且  $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b})$ , 则  $t =$   
A.  $-\frac{6}{5}$  B.  $-\frac{5}{6}$  C. 6 D. -6
3. 已知  $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ , 则  $\tan 2\theta =$   
A.  $\frac{24}{7}$  B.  $\frac{4}{3}$  C.  $-\frac{24}{7}$  D.  $-\frac{4}{3}$
4. 若正实数  $a, b$  满足  $a+b=2$ , 则  
A.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  有最大值 B.  $ab$  有最小值  
C.  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  有最大值 D.  $a^2 + b^2$  有最大值
5. 已知平行四边形  $ABCD$  满足  $BD=2$ ,  $2\vec{AD} \cdot \vec{AB} = |\vec{BC}|^2$ , 则  $|\vec{AB}| =$   
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
6. 高为  $h$  的密闭圆锥容器中有一部分水, 当该容器底面放在水平面上时水面高度为  $h_1$ , 当该容器顶点在水平面上且底面与水平面平行时, 水面高度为  $h_2$ , 若  $h_1 + h_2 = h$ , 则  $h:h_2 =$   
A.  $\sqrt[3]{4}$  B.  $\sqrt[3]{3}$  C.  $\sqrt[3]{2}$  D. 2
7. 已知命题 “ $\exists \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 使得  $a > \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}$ ” 为假命题, 则  $a$  的取值范围为  
A.  $(-\infty, 2\sqrt{2}]$  B.  $(0, 2\sqrt{2}]$  C.  $[2\sqrt{2}, +\infty)$  D.  $(2\sqrt{2}, +\infty)$
8. 已知  $a = \frac{17}{18}$ ,  $b = \cos \frac{1}{3}$ ,  $c = 3 \sin \frac{1}{3}$ , 则  
A.  $a > b > c$  B.  $c > b > a$  C.  $a > c > b$  D.  $b > c > a$

高三数学试题 第 1 页 (共 4 页)

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 设函数  $f(x) = \ln(\cos 2x)$ , 则
- A.  $f(x)$  为奇函数  
B.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$   
C.  $f(x)$  存在零点  
D.  $f(x)$  存在极值点
10. 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为  $A_1B, B_1C$  的中点, 则
- A. 直线  $EF \parallel$  平面  $ABCD$   
B.  $EF \perp AC$   
C. 异面直线  $EF$  与直线  $D_1C$  所成角的大小为  $60^\circ$   
D. 平面  $B_1CD_1$  到平面  $BA_1D$  的距离等于  $EF$
11. 设函数  $f(x) = \sin x - \cos x$ , 则
- A.  $f(x)$  的图象关于  $x = \frac{\pi}{4}$  对称  
B. 函数  $y = f^2(x)$  的最小正周期为  $\pi$   
C. 将曲线  $y = f(x)$  上各点横坐标变为原来的 2 倍, 再将曲线向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位, 得到函数  $y = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}$  的图象  
D. 函数  $y = [f(x) + \cos x](\sqrt{3} \sin x + \cos x)$  的最大值为  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
12. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} (\vec{c} \neq \vec{0})$  满足  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, |\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{2}, (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ . 则
- A.  $\vec{a} \perp \vec{b}$   
B.  $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$   
C.  $|\vec{c} - 2\vec{a}| + |\vec{c} - \vec{b}| \geq 5$   
D. 向量  $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b}, (\vec{d} - \vec{a}) \cdot \vec{c} = z|\vec{c}|$ , 则  $x^2 + y^2 + z^2$  的最小值为  $\frac{2}{5}$

三、填空题: 本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

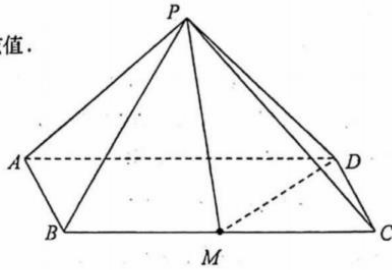
13. 曲线  $f(x) = e^{2-x}$  过原点的切线方程为\_\_\_\_\_.
14. 已知函数  $f(x)$  是定义域为  $\mathbb{R}$  的奇函数,  $f(x) + f(2-x) = 4$ , 则  $f(3) =$ \_\_\_\_\_.
15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |\ln(-x)|, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^{-1}, & x > 1 \end{cases}$ ,  $f(x) = m$  有四个解  $x_1, x_2, x_3, x_4 (x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ , 则  $4x_3^2 + x_1x_2x_4$  的最小值为\_\_\_\_\_.
16. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2\sqrt{13}, BC = 2\sqrt{5}, AC = 2\sqrt{10}$ , 将  $\triangle ABC$  各边中点连线并折成四面体, 则该四面体外接球直径为\_\_\_\_\_; 该四面体的体积为\_\_\_\_\_.  
(本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (10分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形,  $AB=2, BC=4, PA=PD=2\sqrt{2}$ ,  $CD \perp PA$ ,  $M$  为线段  $BC$  的中点。

- (1) 证明: 平面  $ABCD \perp$  平面  $PAD$ ;
- (2) 求平面  $PDM$  与平面  $PCD$  夹角的余弦值。



18. (12分)

已知  $\triangle ABC$  中内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $\sin^2 A + \sin^2 B + 4 \sin A \sin B \cos C = 0$ , 且  $c^2 = 3ab$ .

- (1) 求角  $C$ ;
- (2) 设函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega \in \mathbb{N}^*$ ,  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 在区间  $(\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{2})$  上单调,  $f(C) = -\frac{1}{2}$ , 求  $\varphi$ .

19. (12分)

已知函数  $f(x) = ax - \ln x$ .

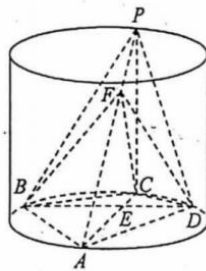
- (1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;
- (2) 若存在  $a > 0$ , 使得  $f(x) \geq \frac{a^2}{2} + b$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  成立, 求实数  $b$  的取值范围.

20. (12分)

如图, 四边形  $ABCD$  是圆柱底面的内接四边形,  $AC$  是圆柱的底面直径,  $PC$  是圆柱的母线,  $E$  是  $AC$  与  $BD$  的交点,  $AP \perp BD$ ,  $AC = BC + CD$ .

(1) 证明:  $\triangle BAD$  是等边三角形;

(2) 若  $AC = 4$ , 设点  $F$  在线段  $AP$  上, 若  $PF : FA = 1 : 3$ , 求点  $P$  到平面  $FBD$  的距离.



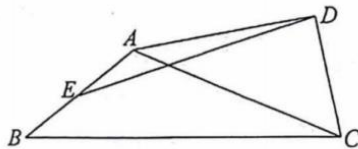
21. (12分)

如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $AD = \sqrt{3}$ ,  $CD = 1$ ,  $\angle ACD = 60^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ .

(1) 证明:  $AD \perp CD$ ;

(2) 求  $\triangle ABC$  面积的最大值;

(3) 设  $E$  为线段  $AB$  的中点, 求  $DE$  的最大值.



22. (12分)

已知函数  $f(x) = e^x - ax^2 - x$ .

(1) 若函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增, 求  $a$  的值;

(2) 当  $a > \frac{1}{2}$  时, 证明: 函数  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 且  $f(x_2) < 1 + \frac{\sin x_2 - x_2}{2}$ .

## 关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索