

辽宁省实验中学 2023—2024 学年度上学期期中阶段测试

高三年级数学试卷

考试时间 120 分钟 试题满分 150 分

命题人：高三数学组 校对入：高三数学组

第I卷（选择题）

一、单选题。本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()

- A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3\}$ D. $\{1, 3\}$

2. 若 $p: (x^2 + x + 1)\sqrt{x+3} \geq 0$, $q: x \geq -2$, 则 p 是 q 的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(2, \frac{1}{4})$, 则 $f(x)$ 的一个单调递减区间是 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, 0)$

4. 欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (其中 i 为虚数单位, $x \in \mathbb{R}$), 是由瑞士著名数学家欧拉创立的, 公式将指数函数的定义域扩大到复数, 建立了三角函数与指数的数的关联, 在复变函数论里面占有非常重要的地位, 被誉为数学中的天桥. 依据欧拉公式, $e^{-\frac{\pi}{3}}$ 的共轭复数为 ()

- A. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
C. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5. 已知角 α 终边与单位圆的交点为 $P(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, 则 $\sqrt{1+\sin 2\alpha} + \sqrt{2-2\cos 2\alpha}$ 的值为 ()

- A. 1 B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{9}{5}$ D. $\frac{13}{5}$

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$, $AB = 2$, $AD = 1$, E 为 AB 的中点, 若 $\overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{BC}$, 且 $AF \perp DE$, 则 $\lambda =$ ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

7. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, 若对任意的正数 a, b , 满足 $f(a) + f(2b - 2) = 0$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为

()

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

8. 在锐角三角形 ABC 中, A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $b^2 = a(a + c)$, 则 $\frac{b+c}{a}$ 的取值范围为 ()

- A. $(1, 5)$ B. $(\sqrt{2} + 1, 5)$
C. $(1, \sqrt{3} + 2)$ D. $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{3} + 2)$

二、多选题. 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不重合的平面, 下列说法正确的是 ()

- A. m, n 是异面直线, 若 $m // \alpha, m // \beta, n // \alpha, n // \beta$, 则 $\alpha // \beta$
B. 若 $\alpha // \beta, m // \alpha$, 则 $m // \beta$
C. 若 $m \perp n, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
D. 若 $m \perp \alpha, m // n, n // \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

10. 关于函数 $f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{3}{4}\pi\right)$, 下列说法正确的是 ()

- A. 由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 可得 $x_1 - x_2$ 必是 $\frac{2}{3}\pi$ 的整数倍
B. $f(x) = -2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
C. $f(x)$ 图像可由 $y = 2\sin 3x$ 向右平移 $\frac{3}{4}\pi$ 个单位得到
D. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上为增函数

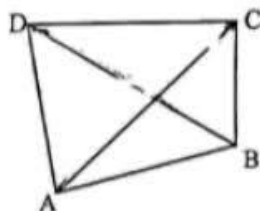
11. 《九章算术》是我国古代数学中的经典, 书中将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑. 在阳马 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD = CD = a$, 点 E 是 PC 的中点, 连接 DE, BD, BE . 以下结论正确的有 ()

- A. $DE \parallel$ 平面 PAB
- B. 四面体 $EBCD$ 是鳖臑
- C. 若阳马 $P-ABCD$ 的体积为 V_1 , 四面体 $EBCD$ 的体积为 V_2 , 则 $V_1 = 4V_2$
- D. 若四面体 $EBCD$ 的外接球的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$, 则 $CD = \sqrt{2}AD$.
12. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(2x+1)$ 为奇函数, 且 $f(x) = f(4-x) + 4x - 8$, 则 ()
- A. $f(x)$ 的图象关于 $(1, 0)$ 对称
- B. 4 是 $f(x)$ 的一个周期
- C. $f(2023) = 4048$
- D. $f(1013) = 2024$

第II卷(非选择题)

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填写在答题纸相应位置上.

13. 函数 $f(x) = 3^x + \ln 2$ 的导函数 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 已知动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 (不含端点) 上, 设 $\frac{D_1P}{D_1B} = \lambda$, 若 $\angle APC$ 为钝角, 则实数 λ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 如图是两个直角三角形板拼成的平面图形, 其中 $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle ABD = \angle ADB = 45^\circ$, $\angle BDC = 30^\circ$, $BC = 1$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$.



16. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中, E 、 F 分别是 PA 、 AB 的中点, $\angle CEF = 90^\circ$. 若 $AB = 1$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n , 且 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{3n}a_n$.

(1) 证明数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和 S_n .

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 且 $\cos C = \frac{a - c \sin B}{b}$,

(1) 求角 B 的大小;

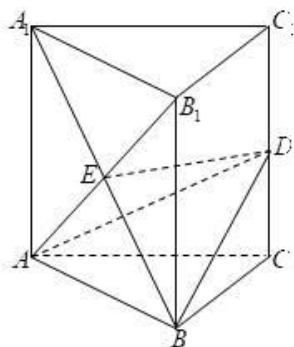
(2) 若 $a=3$, $c=\sqrt{2}$, 求 $\sin C$ 的值.

19. 某职称考试有 A 、 B 两门课程, 每年每门课程均分别有一次考试机会, 若某门课程上一年通过, 则下一年不再参加该科考试, 只要在连续两年内两门课程均通过就能获得该职称. 某考生准备今年两门课程全部参加考试, 预测每门课程今年通过的概率均为 $\frac{1}{2}$; 若两门均没有通过, 则明年每门课程通过的概率均为 $\frac{2}{3}$; 若只有一门没过, 则明年这门课程通过的概率为 $\frac{3}{4}$.

(1) 求该考生两年内可获得该职称的概率;

(2) 设该考生两年内参加考试的次数为随机变量 X , 求 X 的分布列与数学期望.

20. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=2$, D, E 分别为 CC_1, A_1B 的中点且 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G .



(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 求二面角 $B-AD-E$ 的平面角的余弦值.

21. 已知函数 $f(x) = e^x(ax-2) + x + 2$.

(1) 若曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $y=x$ 平行, 求该切线方程;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - ax$, $x \in (0, 1]$, $f'(x)$ 为其导函数. 函数 $f(x)$ 在其定义域 $(0, 1]$ 内有零点 x_0 .

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 设函数 $g(x) = f'(x)(m - x_0) - f(m)$, 求证: 对任意的 $m \in (0, 1]$ 且 $m \neq x_0$, $g(m) \cdot g(x_0) < 0$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线