2023—2024学年度第一学期期中教学质量检测

高三数学试题

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1.答题前,考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、考生号、县区和科类填写到答题卡和试卷规定的位置上。

2.第Ⅰ卷每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。

3.第Ⅱ卷必须用0.5毫米黑色签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新的答案;不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第Ⅰ卷　选择题(60分)

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.设集合 $A=\{x\mid 0<x<5\}$,$B=\left\{x\left|\dfrac{x+1}{x-4}\leqslant 0\right.\right\}$,则 $A\cap B=$

A. $[-1,4]$　　B. $[-1,5)$　　C. $(0,4]$　　D. $(0,4)$

2.在平面直角坐标系 xOy 中,已知角 α 的始边是 x 轴的非负半轴,终边经过点 $P(-1,2)$,则 $\cos(\pi-\alpha)=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3.设复数 z 满足 $z+2\bar{z}=3+i$,则 $\frac{z}{i}=$

A. $1+i$　　B. $-1+i$　　C. $-1-i$　　D. $1-i$

4.定义在R上的函数 $f(x)$,满足 $f(x)=f(-x)$,且在 $(-\infty,0]$ 为增函数,则

A. $f(\cos 2023\pi)<f(\log_{\frac{1}{2023}}2022)<f(2^{\frac{1}{2023}})$

B. $f(2^{\frac{1}{2023}})<f(\cos 2023\pi)<f(\log_{\frac{1}{2023}}2022)$

C. $f(2^{\frac{1}{2023}})<f(\log_{\frac{1}{2023}}2022)<f(\cos 2023\pi)$

D. $f(\log_{\frac{1}{2023}}2022)<f(\cos 2023\pi)<f(2^{\frac{1}{2023}})$

5. 已知命题 p：$\exists x\in[1,4]$，$\log_{\frac{1}{2}}x<2x+a$，则 p 为假命题的一个充分不必要条件是

A. $a>-1$　　B. $a>-11$　　C. $a<-1$　　D. $a<-11$

6. 函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 向右平移 $m(m>0)$ 个单位后，所得函数 $g(x)$ 是偶函数，则 m 的最小值是

A. $-\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

7. 已知 $x>0,y>0$，且 $x+2y=1$，则 3^x+9^y 的最小值为

A. $2\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}$

8. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$2\sin\beta-\cos\alpha=1$，$\sin\alpha+2\cos\beta=\sqrt{3}$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知向量 $\vec{a}=(2,m)$，$\vec{b}=(-1,2)$，且 $(\vec{a}-2\vec{b})\perp\vec{b}$，则下列说法正确的是

A. $m=3$　　B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$

C. 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角是 $\frac{\pi}{4}$　　D. $|\vec{a}-\vec{b}|=5$

10. 已知 $a<b<0$，则下列结论正确的是

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $ab<b^2$

C. $a^{\frac{1}{5}}<b^{\frac{1}{5}}$　　D. $\sqrt{a^2-a}>\sqrt{b^2-b}$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，$(n-2)S_{n+1}+2a_{n+1}=nS_n$，$n\in N^*$，下列说法正确的是

A. $a_2=4$　　B. $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为常数列

C. $a_7=15$　　D. $S_n=n^2+n$

12. 已知 $a>1$，函数 $f(x)=xa^x-1$，$g(x)=x\log_a x-1$，若 $f(b)=g(c)=0(b,c>0)$，则下列成立的是

A. $b<1,c>1$　　B. $bc=1$

C. $b+c=2$　　D. $b+2c>3$

第Ⅱ卷 非选择题(90分)

三、填空题:本题共4个小题,每小题5分,共20分。

13. 已知一扇形的圆心角为$\frac{7}{2\pi}$,弧长为7,则该扇形的面积为________.

14. 已知直线$3x+y=b$是函数$f(x)=a\ln x+\frac{2}{x}$在点$(1,m)$处的切线,则$a+b=$________.

15. 古希腊数学家海伦在其所著的《度量论》或称《测地术》中给出了用三角形的三边长表示三角形的面积的公式,即已知三角形的三条边长分别为a,b,c,则它的面积为$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,其中$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,这个公式称之为海伦公式,形式优美,体现了数学的对称美。已知ΔABC的周长是18,且满足$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$,则$\Delta ABC$的面积为________.

16. 已知O是ΔABC的内心,$AB=9,BC=14,CA=13$,则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=$________

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。

17.(满分10分)

已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_5+a_8=15,S_5=15$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)已知求数列$b_n=\frac{a_n}{2^{a_n}}$,求$\{b_n\}$的前n项和S_n.

18.(满分12分)

已知函数$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+m$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为6,

(1)求函数$f(x)$的单调递减区间;

(2)求使$f(x)\leqslant 3$成立的x的取值集合.

19.(满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^{x}-x$

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)证明:当 $a\geqslant1$,$f(x)\geqslant0$.

20.(满分 12 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=2$ 且 $a_n^2=a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$

(1)求数列 $\{\log_2 a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

(2)设 b_n 是满足不等式 $a_n\leqslant t\leqslant a_{n+1}$ 的所有 $t(t\in\mathbf{N}^*)$ 的个数,数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n,

求 $\log_2(T_8-6)$.

21.(满分 12 分)

在 ΔABC 中,D 为 BC 上一点,满足 $BD=2CD$,且 $\angle BAC+\angle DAC=\pi$.

(1)证明:$AB=3AD$.

(2)若 $BC=3AC$,求 $\cos\angle BAC$.

22.(满分 12 分)

设函数 $f(x)=x\ln a$,$g(x)=a\ln x$.

(1)$a>1$,对 $\forall x\in[4,+\infty)$,$f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立,求 a 的取值范围;

(2)设 $G(x)=g(x+2)+\frac{1}{2}x^2-2x$,若方程 $G'(x)=0$ 的两根为 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,

求证:$x_2+G(x_2)>x_1-G(-x_1)$.

2023—2024 学年度第一学期期中教学质量检测

高三数学试题参考答案

一、单项选择题

DACB　DCAB

二、多项选择题

9. BCD　10. ACD　11. ABD　12. ABD

三、填空题

13. 7π　14. 4　15. $3\sqrt{15}$　16. 36

四、解答题

17. (1)因为$\{a_n\}$为等差数列

因为 $a_2+a_5+a_8=3a_5=15$，所以 $a_5=5$

因为 $S_5=15$，所以 $5a_3=15$，所以 $a_3=3$

所以 $2d=5-3=2$，所以 $d=1$，…………………… 3 分

所以 $a_n=3+n-3=n$ …………………… 4 分

(2)由(1)知，$a_n=n$，所以 $b_n=\frac{a_n}{2^n}=\frac{n}{2^n}$，…………………… 5 分

所以 $S_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$，

所以 $S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$，…………………… 8 分

所以$\frac{1}{2}S_n=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$，

所以 $S_n=2-\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{2+n}{2^n}$ …………………… 10 分

18. (1)$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

$\therefore f(x)$的最大值为 $2+m$，$\therefore 2+m=6$，$\therefore m=4$，$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4$ ……… 4 分

由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得$\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$ …………………… 8 分

(2)$\because f(x)\leqslant 3$，即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant -\frac{1}{2}$，所以 $\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$

所以 $\frac{\pi}{2}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故 x 的取值集合为 $\left[\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$ …… 12 分

19. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^{x}-1=(ae^{x}-1)(2e^{x}+1)$

$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^{x}-1=(ae^{x}-1)(2e^{x}+1)$ …… 1 分

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减 …… 3 分

②若 $a>0$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=-\ln a$

当 $x\in(-\infty,-\ln a)$ 时，$f'(x)<0$

当 $x\in(-\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 单调递增 …… 5 分

综上：$a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减；

$a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 单调递减；

在 $(-\ln a,+\infty)$ 单调递增. …… 6 分

(2) 法一：当 $a\geqslant 1$ 时，$g(a)=a(e^{2x}+e^{x})-2e^{x}-x\geqslant e^{2x}-e^{x}-x$ …… 9 分

设 $h(x)=e^{2x}-e^{x}-x$，$h'(x)=2e^{2x}-e^{x}-1=(2e^{x}+1)(e^{x}-1)$

由 $h'(x)=0$ 得 $x=0$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)<0$

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增 …… 11 分

所以 $h(x)_{\min}=h(0)=0$

所以，当 $a\geqslant 1$，$f(x)\geqslant 0$ …… 12 分

法二：由(1)知，$a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 单调递减；在 $(-\ln a,+\infty)$ 单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(-\ln a)=ae^{-2\ln a}+(a-2)e^{-\ln a}+\ln a$

$=\ln a+1-\frac{1}{a}\geqslant 0$ …… 10 分

$\therefore a\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 0$. …… 12 分

20. (1) 因为 $a_n^2=a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $\log_2 a_n^2=\log_2 a_{n+1}$，即 $2\log_2 a_n=\log_2 a_{n+1}$ …… 2 分

所以 $\{\log_2 a_n\}$ 是以 1 为首项 2 为公比的等比数列 …… 3 分

所以 $\log_2 a_n=2^{n-1}$

所以 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$ …… 5 分

(2) 由(1)知 $a_n=2^{2^{n-1}}$，所以 $2^{2^{n-1}}\leqslant t\leqslant 2^{2^n}$，

所以 $b_n=a_{n+1}-a_n+1$ …… 7 分

所以 $T_n=a_2-a_1+1+a_3-a_2+1+\ldots+a_{n+1}-a_n+1=a_{n+1}-a_1+n=2^{2^n}-2+n$ …… 10 分

所以 $\log_2(T_8-6)=\log_2 2^{2^8}=2^8=256$ …………………………………………………… 12 分

21.(1)因为 D 为 BC 上一点,满足 $BD=2CD$

所以 $S_{\Delta ABC}=3S_{\Delta ACD}$,所以 $\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=3\times\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle DAC$ ……… 3 分

因为 $\angle BAC+\angle DAC=\pi$,所以 $\sin\angle BAC=\sin\angle DAC$

所以 $AB=3AD$ …………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $AB=3AD$,设 $AD=m$,则 $AB=3m$

又因为 $BC=3AC$,D 为 BC 上一点,$BD=2CD$,设 $CD=n$,则 $BD=2n$,$AC=n$ …… 6 分

在 ΔABD 中,$\cos\angle ADB=\frac{(2n)^2+m^2-(3m)^2}{2\times 2nm}=\frac{n^2-2m^2}{mn}$

在 ΔACD 中,$\cos\angle ADC=\frac{n^2+m^2-n^2}{2nm}=\frac{m^2}{2mn}$

所以 $\frac{n^2-2m^2}{mn}+\frac{m^2}{2mn}=0$ ……………………………………………………… 9 分

所以 $2n^2=3m^2$ …………………………………………………………………………… 10 分

在 ΔABC 中,$\cos\angle BAC=\frac{(3m)^2+n^2-(3n)^2}{2\times 3mn}=\frac{9m^2-8n^2}{6mn}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$ ……………………… 12 分

22.(1)由 $f(x)\geqslant g(x)$ 得 $\frac{\ln a}{a}\geqslant\frac{\ln x}{x}$, ……………………………………………… 1 分

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x\geqslant 4)$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, ……………………………………… 2 分

令 $h'(x)=0$,得 $x=e$,故 $h(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x)_{\max}=h(4)=\frac{\ln 4}{4}$, ……………………………………………………………… 3 分

$\frac{\ln a}{a}\geqslant\frac{\ln x}{x}$ 等价于 $\frac{\ln a}{a}\geqslant h(x)_{\max}=\frac{\ln 4}{4}$,即 $h(a)\geqslant H(4)$

又因为 $\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$,$y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(1,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减 …………………… 4 分

所以 $\frac{\ln 2}{2}\leqslant\frac{\ln a}{a}\leqslant\frac{\ln 4}{4}$,即 $2\leqslant a\leqslant 4$

故 a 的取值范围为 $[2,4]$ …………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $g(x)=a\ln x$,即 $g(x+2)=a\ln(x+2)$

所以 $G(x)=g(x+2)+\frac{1}{2}x^2-2x=a\ln(x+2)+\frac{1}{2}x^2-2x$,其定义域为 $(-2,+\infty)$,

则 $G'(x)=\frac{a}{x+2}+x-2=\frac{x^2+a-4}{x+2}$,$x>-2$, ……………………………………………… 6 分

因为方程 $G'(x)=0$ 有两根为 x_1,x_2,即 $x^2+a-4=0$ 的两根为 x_1,x_2,且 $-2<x_1<x_2$,

所以,$0<4-a<4$,即 $0<a<4$,且 $x_1+x_2=0$,$x_1x_2=a-4$, ………………………………… 7 分

所以 $x_2=-x_1$，$a=x_1x_2+4$，且 $x_2\in(0,2)$，

所以 $G(-x_1)=G(x_2)$，$a=x_1x_2+4=4-x_2^2$，………………………………………… 8 分

要证 $x_2+G(x_2)>x_1-G(-x_1)$，只需证 $G(-x_1)+G(x_2)>x_1-x_2$，即证 $G(x_2)+x_2>0$，

即证 $a\ln(x_2+2)+\frac{1}{2}x_2^2-x_2>0$，即证 $(2-x_2)\left[(x_2+2)\ln(x_2+2)-\frac{1}{2}x_2\right]>0$，…… 9 分

因为 $x_2\in(0,2)$，只需证 $(x_2+2)\ln(x_2+2)-\frac{1}{2}x_2>0$， ………………………… 10 分

令 $t(x)=(x+2)\ln(x+2)-\frac{1}{2}x$，$x\in(0,2)$，

则 $t'(x)=\ln(x+2)+\frac{1}{2}>\ln2+\frac{1}{2}>0$，………………………………………… 11 分

所以，$t(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，且 $t(0)=2\ln2>0$，

故 $t(x)>t(0)>0$，所以 $x_2+G(x_2)>x_1-G(-x_1)$ ………………………………… 12 分