

绝密★启用前

天一大联考
2023—2024 学年(上)高一年级期中考试

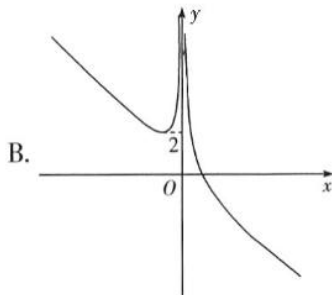
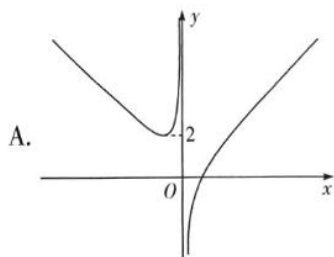
数 学

考生注意:

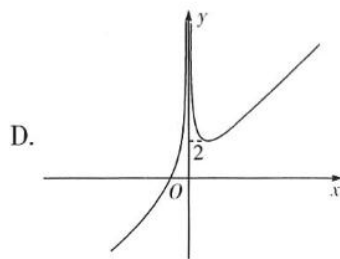
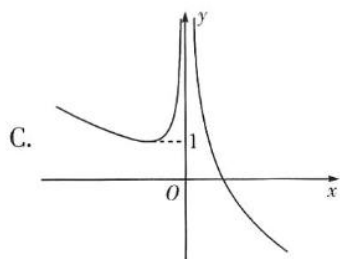
1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{1, m\}$, $B = \{2m - 2, 1\}$, 若 $A = B$, 则实数 $m =$
A. 0 B. 1 C. 1 或 2 D. 2
2. 函数 $f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x^2-1}$ 的定义域是
A. $\{x|x \geq 2\}$ B. $\{x|0 < x < 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$
C. $\{x|x > 1\}$ D. $\{x|x \neq \pm 1\}$
3. 已知命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2a - 1 > 0$ ”为假命题,则实数 a 的取值范围是
A. $(0, \frac{1}{2}]$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ C. $(-\frac{1}{2}, 1)$ D. $(\frac{1}{2}, +\infty)$
4. “ $a > 1$ ”是“函数 $f(x) = a^x - a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象经过第三象限”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 函数 $f(x) = \frac{1}{|x|} - x$ 的大致图象是



数学试题 第 1 页(共 4 页)



6. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 5)$ 上单调递减, 且 $f(x+5) = f(-x+5)$, 则
- A. $f(8) > f(3) > f(4)$ B. $f(3) > f(8) > f(4)$
C. $f(3) > f(4) > f(8)$ D. $f(4) > f(3) > f(8)$
7. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + ax - 3}{x}$ 是奇函数, 且在区间 $[m-1, m]$ 上的最大值为 2, 则 $m =$
- A. 2 或 -1 B. -1 C. 3 D. 3 或 -1
8. 已知函数 $f(x)$ 是三次函数且是幂函数, $g(x) = \frac{f(x) + 2^{|x|+1}}{2^{|x|}}$, 则 $g(-2023) + g(-2022) + g(-2021) + \dots + g(0) + \dots + g(2021) + g(2022) + g(2023) =$
- A. 4047 B. 8092 C. 8094 D. 9086

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $a > c, a + b - c = 0$, 则
- A. $a + 2b > c + b$ B. $ab < bc$
C. $a + b > a - b$ D. $a - 2b > c - b$
10. 已知函数 $f(x) = (a-1)a^x$ 是指数函数, 函数 $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0, \\ 4x - 4, & x > 0, \end{cases}$ 则
- A. $f(x)$ 是增函数
B. $g(x)$ 是增函数
C. $g(g(-2)) = -3$
D. 满足不等式 $f(x) > g(x)$ 的最小整数是 1
11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(xy) = y^3 f(x) + x^3 f(y)$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$, 则
- A. $f(x) = x^3$ B. $f(-2) = 8$
C. $f(x)$ 为奇函数 D. $f(x)$ 为增函数
12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \leq 0, \\ |2^x - 2|, & x > 0, \end{cases}$ 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$ ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), 则下列说法正确的有
- A. $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$ 上单调递减
B. 直线 $y = a (a \geq 1)$ 与 $f(x)$ 的图象总有 3 个不同的公共点
C. $x_1 + x_2 = -2$
D. $x_3 + x_4 < 2$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 函数 $f(x) = b^{x-1} + 3$ ($b > 0$ 且 $b \neq 1$) 的图象过的定点坐标为_____.

14. 已知幂函数 $f(x)$ 满足 $\frac{f(4)}{f(2)} = 3$, 则 $f\left(\frac{1}{8}\right) =$ _____.

15. 科学研究发现,大西洋鲑鱼的耗氧量的单位数 m 与其游动速度 v (单位: m/s) 的关系式为 $m = k \cdot 9^v$ ($k > 0$ 且 k 为常数). 当这种鲑鱼的游动速度为 2 m/s 时,其耗氧量为 8100 个单位,若这种鲑鱼的游动速度不小于 1.5 m/s ,则其耗氧量至少为_____个单位.

16. 已知关于 x 的一元二次不等式 $kx^2 - 2x + 2 < 0$ 的解集为 (a, b) ($b > a$), 则 $4a + b$ 的最小值为_____.

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

(I) 已知 $5^m = 2, 5^n = 3$, 求 $5^{\frac{3m-2n}{2}}$ 的值;

(II) 化简: $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}} \div \left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}\right) \times \frac{1}{6}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$.

18. (12分)

已知函数 $f(x) = x - \frac{2}{x}$ ($x \in \mathbf{R}^+$).

(I) 用函数单调性的定义证明 $f(x)$ 是增函数;

(II) 求不等式 $f\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) \geq -1$ 的解集.

19. (12分)

已知关于 x 的不等式 $2x^2 + (m-2)x - m < 0$.

(I) 当 $m > -2$ 时, 求该不等式的解集 A ;

(II) 在(I)的条件下, 若集合 $B = (m^2 + 2m, m + 2)$, 且 $A \cap B = B$, 求 m 的取值范围.

20. (12分)

2023年9月23日,第19届亚运会开幕式在杭州举行,完美展现了“绿色”与“科技”的融合.已知某种绿色科技产品在亚运会开幕式后的30天内(包括第30天),第 $x(x \in \mathbf{N}^*)$ 天

每件的销售价格 M (单位:元)满足 $M(x) = \begin{cases} x+80, & 1 \leq x \leq 20, \\ -x+120, & 20 < x \leq 30, \end{cases}$ 第 x 天的日销售量

N (单位:千件)满足 $N(x) = a + \frac{b}{x}$,且第2天的日销售量为13 000件,第3天的日销售量为12 000件.

(I)求 $N(x)$ 的解析式;

(II)若每件该产品的总成本为20元,求该产品在开幕式后的30天内第 x 天的日销售利润 $f(x)$ (单位:千元)的解析式,并求开幕式后的第几日销售利润最小.

21. (12分)

已知函数 $f(x), g(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数和奇函数,且 $f(x) + g(x) = x^2 - x - 1$.

(I)求 $f(x), g(x)$ 的解析式;

(II)设函数 $h(x) = f(x) + 2ag(x) + 3a - 1(a > 0)$,若对任意的 $x_1 \in [1, \sqrt{2}]$,总存在 $x_2 \in [-1, 1]$,使得 $f(x_1) = h(x_2)$ 成立,求实数 a 的取值范围.

22. (12分)

已知函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y = a^{x-1} + 2(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的图象先向下平移2个单位长度,再向左平移1个单位长度得到,且 $f(2) = 16$.

(I)求 a 的值;

(II)若函数 $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+2}$,证明: $g(x) + g(1-x) = 1$;

(III)若函数 $y_1 = |f(x) + m|$ 与 $y_2 = |f(-x) + m|$ 在区间 $[1, 2]$ 上都是单调的,且单调性相同,求实数 m 的取值范围.

天一大联考
2023—2024 学年(上)高一年级期中考试

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 D

命题意图 本题考查集合的定义.

解析 由题可知 $m = 2m - 2$, 解得 $m = 2$.

2. 答案 A

命题意图 本题考查函数的定义域.

解析 由题可知 $x - 2 \geq 0$ 且 $x^2 - 1 \neq 0$, 解得 $x \geq 2$.

3. 答案 B

命题意图 本题考查全称量词命题的否定及命题的真假.

解析 由题可知命题“ $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2 + 2a - 1 \leq 0$ ”为真命题, 则 $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2 \leq 1 - 2a$, 故 $1 - 2a \geq 0$, $a \leq \frac{1}{2}$.

4. 答案 C

命题意图 本题考查函数的图象与性质.

解析 当 $a > 1$ 时, $f(0) = 1 - a < 0$, 再结合指数函数 $y = a^x (a > 1)$ 的图象特征可知 $f(x)$ 的图象经过第一、三、四象限, 所以充分性成立; 若 $f(x)$ 的图象经过第三象限, 易知 $0 < a < 1$ 时不成立, 所以 $a > 1$, 且 $f(0) = 1 - a < 0$, 解得 $a > 1$, 所以必要性成立.

5. 答案 B

命题意图 本题考查函数的图象.

解析 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} - x$, 为减函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{-x} - x \geq 2\sqrt{\frac{1}{-x} \cdot (-x)} = 2$, 当且仅当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得最小值 2. 故 B 选项的图象符合题意.

6. 答案 A

命题意图 本题考查函数的对称性和单调性.

解析 因为 $f(x+5) = f(-x+5)$, 所以 $f(8) = f(3+5) = f(-3+5) = f(2)$. 因为 $f(x)$ 在区间 $(0, 5)$ 上单调递减, 所以 $f(2) > f(3) > f(4)$, 即 $f(8) > f(3) > f(4)$.

7. 答案 D

命题意图 本题考查函数的奇偶性和单调性.

解析 由题可知 $\frac{x^2 + ax - 3}{x} = -\frac{x^2 - ax - 3}{-x}$, 则 $2ax = 0$, $a = 0$, 所以 $f(x) = x - \frac{3}{x}$. 因为 $f(x)$ 在区间 $[m-1, m]$ 上单调递增, 所以 $f(m) = m - \frac{3}{m} = 2$, 解得 $m = 3$ 或 -1 .

8. 答案 C



命题意图 本题考查幂函数的定义及函数的奇偶性.

解析 因为 $f(x)$ 是三次函数且是幂函数,所以 $f(x) = x^3$,所以 $g(x) = \frac{x^3 + 2^{|x|+1}}{2^{|x|}} = \frac{x^3}{2^{|x|}} + 2$. 令 $h(x) = g(x) - 2 = \frac{x^3}{2^{|x|}}$,则 $h(x)$ 是奇函数,所以 $g(-2\ 023) + g(-2\ 022) + g(-2\ 021) + \cdots + g(0) + \cdots + g(2\ 021) + g(2\ 022) + g(2\ 023) = h(-2\ 023) + h(-2\ 022) + h(-2\ 021) + \cdots + h(0) + \cdots + h(2\ 021) + h(2\ 022) + h(2\ 023) + 4\ 047 \times 2 = [h(-2\ 023) + h(2\ 023)] + [h(-2\ 022) + h(2\ 022)] + [h(-2\ 021) + h(2\ 021)] + \cdots + [h(-1) + h(1)] + h(0) + 8\ 094 = 8\ 094$.

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 答案 BD

命题意图 本题考查不等式的性质.

解析 由 $a + 2b > c + b$ 可知 $a + b - c > 0$,与已知矛盾,所以A错误;由题可知 $b = c - a < 0$,则 $ab < bc$,所以B正确; $a + b > a - b$ 等价于 $b > 0$,与 $b < 0$ 矛盾,所以C错误; $a - 2b > c - b$ 等价于 $a - c - b > 0$,因为 $a > c$,所以 $a - c > 0$,又 $-b > 0$,所以 $a - c - b > 0$,所以D正确.

10. 答案 ACD

命题意图 本题考查指数函数的定义及分段函数求值.

解析 由题可知 $a - 1 = 1$,解得 $a = 2$,则 $f(x)$ 是增函数,所以A正确; $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ 4x - 4, & x > 0, \end{cases}$ 当 $x = 0$ 时, $2^x = 2^0 = 1$, $4x - 4 = -4$, $1 > -4$,所以 $g(x)$ 不是增函数,所以B错误; $g(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, $g(\frac{1}{4}) = 4 \times \frac{1}{4} - 4 = -3$,所以C正确;由题易知只需考虑 $x > 0$ 的情况,将 $x = 1$ 代入可得 $f(x) > g(x)$ 成立,所以最小整数是1.

11. 答案 BC

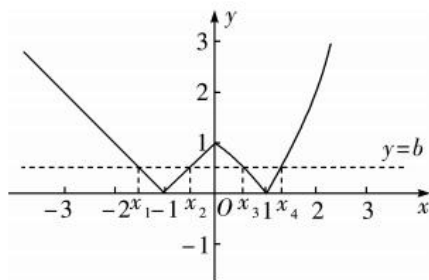
命题意图 本题考查抽象函数的性质.

解析 令 $x = y = 1$,得 $f(1) = f(1) + f(1)$,即 $f(1) = 0$, $f(x) = x^3$ 不满足,所以A错误;令 $x = -1, y = -1$,得 $f(1) = -f(-1) - f(-1)$,即 $f(-1) = 0$,令 $x = -2, y = \frac{1}{2}$,得 $f(-1) = \frac{1}{8}f(-2) - 8f(\frac{1}{2}) = 0$,得 $f(-2) = 8$,所以B正确;令 $y = -1$,得 $f(-x) = -f(x) + x^3f(-1) = -f(x)$,故 $f(x)$ 为奇函数,所以C正确;由 $f(-1) = 0, f(1) = 0$,可知D错误.

12. 答案 ACD

命题意图 本题考查函数的图象和性质.

解析 画出函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \leq 0, \\ |2^x - 2|, & x > 0 \end{cases}$ 的大致图象,如图所示,由图可知 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$ 上单调递减,所以A正确;由图可知,当 $a = 1$ 时,直线 $y = a$ 与 $f(x)$ 的图象有3个不同的公共点,当 $a > 1$ 时,直线 $y = a$ 与 $f(x)$ 的图象有2个不同的公共点,所以B错误;令 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = b (0 < b < 1)$,可得直线 $y = b$ 与 $f(x)$ 的图象有4个不同的交点,且交点横坐标分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 ,由图可知 $x_1 + x_2 = -2, 2 - 2^{x_3} = 2^{x_4} - 2$,即 $2^{x_3} + 2^{x_4} = 4 \geq 2\sqrt{2^{x_3} \cdot 2^{x_4}} = 2\sqrt{2^{x_3+x_4}}$,所以 $x_3 + x_4 \leq 2$,因为 $x_3 < x_4$,所以 $x_3 + x_4 < 2$,所以C, D正确.



三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 答案 (1,4)

命题意图 本题考查指数函数的定义.

解析 当 $x=1$ 时, $f(x) = b^0 + 3 = 4$, 故 $f(x)$ 的图象恒过点 $(1,4)$.

14. 答案 $\frac{1}{27}$

命题意图 本题考查幂函数的性质.

解析 设 $f(x) = x^a$, 则 $\frac{f(4)}{f(2)} = \frac{4^a}{2^a} = 2^a = 3$, 所以 $f\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^a = \frac{1}{(2^a)^3} = \frac{1}{27}$.

15. 答案 2 700

命题意图 本题考查函数模型的应用.

解析 由题可知 $8\ 100 = k \cdot 9^2$, 解得 $k = 100$. 当 $v \geq 1.5$ 时, $m \geq 100 \cdot 9^{1.5} = 2\ 700$.

16. 答案 9

命题意图 本题考查基本不等式的应用.

解析 由题可知 a, b 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x + 2 = 0$ 的实数根, 且 $k > 0$, 则 $\begin{cases} a+b = \frac{2}{k}, \\ ab = \frac{2}{k}, \end{cases}$ 所以 $a+b =$

ab , 且 $a > 0, b > 0$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 所以 $4a + b = (4a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + 4 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 9$, 当且仅当 $b = 2a$, 即 $a = \frac{3}{2}, b = 3$ 时取等号.

四、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 命题意图 本题考查指数的运算.

解析 (I) $5^{\frac{3m-2n}{2}} = \sqrt{(5^m)^3} \cdot \frac{1}{5^n} = \sqrt{2^3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (5分)

(II) $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}} \div \left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}\right) \times \frac{1}{6}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$
 $= 4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}} \times \left(-\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right) \times \frac{1}{6}a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$ (7分)

$= 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{6}a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$
 $= -a^{\frac{2}{3}}$ (10分)

18. 命题意图 本题考查函数单调性的定义及不等式的求解.

解析 (I) 设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$ 且 $x_1 > x_2$, (1分)

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \left(x_1 - \frac{2}{x_1}\right) - \left(x_2 - \frac{2}{x_2}\right) \\ &= x_1 - x_2 + \frac{2}{x_2} - \frac{2}{x_1} \\ &= (x_1 - x_2) + \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} \\ &= (x_1 - x_2) \left(1 + \frac{2}{x_1 x_2}\right) > 0. \end{aligned} \dots\dots\dots (4分)$$

所以 $f(x)$ 是增函数. (6分)

(II) 由 (I) 可知 $f(x)$ 是增函数, $f(1) = -1$ (8分)

所以不等式 $f\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) \geq -1$ 即 $2^x - \frac{2}{2^x} \geq 1$, (9分)

变形得 $(2^x)^2 - 2^x - 2 \geq 0$, (10分)

即 $(2^x - 2)(2^x + 1) \geq 0$, (11分)

解得 $x \geq 1$, 即不等式的解集为 $[1, +\infty)$ (12分)

19. 命题意图 本题考查一元二次不等式的解法及集合的关系.

解析 (I) 将不等式 $2x^2 + (m-2)x - m < 0$ 变形,
可得 $(x-1)(2x+m) < 0$ (2分)

因为 $m > -2$, 所以 $-\frac{m}{2} < 1$ (4分)

所以不等式 $2x^2 + (m-2)x - m < 0$ 的解集 $A = \left(-\frac{m}{2}, 1\right)$ (6分)

(II) 由题可知 $B \subseteq A$ (8分)

$$\text{所以 } \begin{cases} m^2 + 2m < m + 2, \\ m^2 + 2m \geq -\frac{m}{2}, \\ m + 2 \leq 1, \end{cases} \dots\dots\dots (10分)$$

结合 $m > -2$, 得 $m \in \emptyset$.
故 m 的取值范围为 \emptyset (满足条件的 m 不存在). (12分)

20. 命题意图 本题考查函数模型.

$$\text{解析 (I) 由题可知 } \begin{cases} a + \frac{b}{2} = 13, \\ a + \frac{b}{3} = 12, \end{cases} \dots\dots\dots (1分)$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 10, \\ b = 6, \end{cases} \dots\dots\dots (3分)$$

所以 $N(x) = 10 + \frac{6}{x} (1 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*)$ (4分)

(II) 由题可得每件该产品的销售利润为 $P(x) = \begin{cases} x+60, & 1 \leq x \leq 20, \\ -x+100, & 20 < x \leq 30, \end{cases}$ (5分)

所以第 x 天的日销售利润 $f(x) = N(x) \cdot P(x) = \begin{cases} \left(10 + \frac{6}{x}\right)(x+60), & 1 \leq x \leq 20, \\ \left(10 + \frac{6}{x}\right)(-x+100), & 20 < x \leq 30, \end{cases}$

即 $f(x) = \begin{cases} 10x + \frac{360}{x} + 606, & 1 \leq x \leq 20, \\ -10x + \frac{600}{x} + 994, & 20 < x \leq 30. \end{cases}$ (7分)

当 $1 \leq x \leq 20$ 时, $f(x) = 10x + \frac{360}{x} + 606 \geq 2\sqrt{10x \cdot \frac{360}{x}} + 606 = 726$,

当且仅当 $10x = \frac{360}{x}$, 即 $x=6$ 时等号成立, (9分)

当 $20 < x \leq 30$ 时, $f(x) = -10x + \frac{600}{x} + 994$ 为减函数,

所以 $f(x)_{\min} = f(30) = 714 < 726$ (11分)

故当 $x=30$ 时, $f(x)$ 取得最小值 714, 即开幕式后的第 30 天的日销售利润最小. (12分)

21. 命题意图 本题考查函数的性质及不等式的求解.

解析 (I) 因为 $f(x), g(x)$ 分别是偶函数和奇函数,

$$f(x) + g(x) = x^2 - x - 1 \text{ ①},$$

所以 $f(-x) + g(-x) = x^2 + x - 1$, 即 $f(x) - g(x) = x^2 + x - 1$ ②. (1分)

① - ② 可得 $2g(x) = -2x$, 即 $g(x) = -x$, (3分)

① + ② 可得 $2f(x) = 2x^2 - 2$, 即 $f(x) = x^2 - 1$.

所以 $f(x) = x^2 - 1, g(x) = -x$ (5分)

(II) 由 (I) 可知 $h(x) = x^2 - 2ax + 3a - 2$, 图象开口向上, 对称轴为 $x=a$, $f(x)$ 在区间 $[1, \sqrt{2}]$ 上的值域为 $[0, 1]$.

..... (6分)

由题可知, $f(x)$ 在区间 $[1, \sqrt{2}]$ 上的最小值大于等于 $h(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最小值, $f(x)$ 在区间 $[1, \sqrt{2}]$ 上的最大值小于等于 $h(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值. (7分)

当 $0 < a < 1$ 时, $h(x)$ 在区间 $[-1, a]$ 上单调递减, 在区间 $[a, 1]$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(a) = -a^2 + 3a - 2, h(x)_{\max} = h(-1) = 5a - 1$.

所以 $\begin{cases} -a^2 + 3a - 2 \leq 0, \\ 5a - 1 \geq 1, \end{cases}$ 得 $\frac{2}{5} \leq a < 1$ (9分)

当 $a \geq 1$ 时, $h(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减,

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = a - 1, h(x)_{\max} = h(-1) = 5a - 1$.

所以 $\begin{cases} a - 1 \leq 0, \\ 5a - 1 \geq 1, \end{cases}$ 得 $a = 1$ (11分)

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{5}, 1\right]$ (12分)

22. 命题意图 本题考查指数函数的性质及不等式求解.

解析 (I) 函数 $y = a^{x-1} + 2$ 的图象向下平移 2 个单位长度后得到 $y = a^{x-1}$ 的图象, 再向左平移 1 个单位长度得到 $y = a^x$ 的图象,

所以 $f(x) = a^x$ (2分)

又 $f(2) = a^2 = 16$,

所以 $a = 4$ (负值舍去). (3分)

(II) 由 (I) 可知 $g(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ (4分)

所以 $g(x) + g(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x} + 2} = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4}{4 + 2 \times 4^x} = \frac{4^x + 2}{4^x + 2} = 1$ (7分)

(III) 由 (I) 可知 $y_1 = |4^x + m|, y_2 = |4^{-x} + m|$ (8分)

若两函数在区间 $[1, 2]$ 上都是增函数,

则 $\begin{cases} 4^x + m \geq 0, \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x + m \leq 0 \end{cases}$ 在区间 $[1, 2]$ 上恒成立,

可得 $\begin{cases} 4 + m \geq 0, \\ \frac{1}{4} + m \leq 0, \end{cases}$ 解得 $-4 \leq m \leq -\frac{1}{4}$ (10分)

若两函数在区间 $[1, 2]$ 上都是减函数,

则 $\begin{cases} 4^x + m \leq 0, \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x + m \geq 0 \end{cases}$ 在区间 $[1, 2]$ 上恒成立,

可得 $\begin{cases} 16 + m \leq 0, \\ \frac{1}{16} + m \geq 0, \end{cases}$ 该不等式组无解. (11分)

综上, 实数 m 的取值范围是 $\left[-4, -\frac{1}{4}\right]$ (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

