绝密★启用前

2023—2024 学年天一大联考 · 安徽卓越县中联盟高三(上)期中考试

数　学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

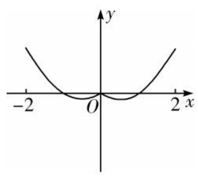
1. 若集合 $P=\{x|m^2-2m<x<3,x\in\mathbf{Z}\}$ 有 7 个真子集,则实数 m 的取值范围为

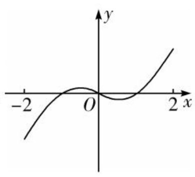
A. $(0,2)$　　B. $[0,2)$　　C. $(0,2]$　　D. $[0,2]$

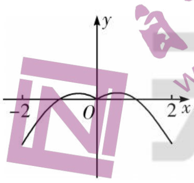
2. 已知复数 z 满足 $z-1=\frac{1-3\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$,则 $\bar{z}=$

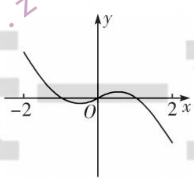
A. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\frac{x^3-x}{2^{|x|}+1}$ 在 $[-2,2]$ 上的图象大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

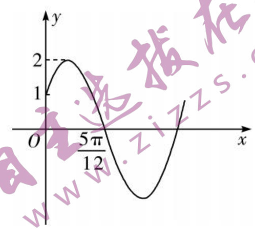
4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin 2x,1+\cos 2x)$,$\boldsymbol{b}=(1,\sin 2x)$,且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,若 $0<x<\frac{\pi}{2}$,则 $x=$

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{8}$

5. 已知角 θ 的顶点在坐标原点,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边经过点 $P(-2,4)$,则 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-2\cos(\pi+\theta)=$

A. $-\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　C. 0　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

6. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，若函数 $f(x-\theta)$ 的图象关于原点对称，则 $|\theta|$ 的最小值为



A. $\frac{5\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

7. 已知 $a=\pi-\frac{1}{\pi}$，$b=2\ln\pi$，$c=3\ln 2.1$，则

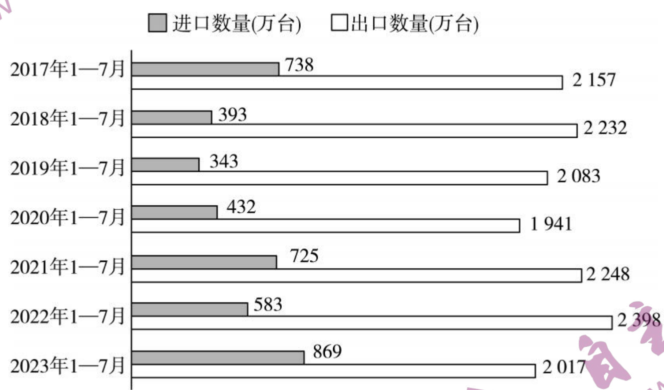
A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

8. 已知在 $\triangle ABC$ 中，P,Q 分别为边 AC,BC 上的点，$PB=3PC=3$，$\cos\angle BPC=-\frac{1}{3}$，且 $\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QA})=3$，则 $|\overrightarrow{PA}|$ 的最小值为

A. $2\sqrt{3}-1$　　B. $2\sqrt{2}-1$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 如图为 2017 年至 2023 年每年 1—7 月中国中央处理部件进出口数量统计图，则下列说法正确的是



A. 2017 年至 2023 年每年 1—7 月中央处理部件进口数量的中位数为 583

B. 2017 年至 2023 年每年 1—7 月中央处理部件出口数量的 40% 分位数为 2 050

C. 2017 年至 2023 年每年 1—7 月中央处理部件出口数量的平均数超过 2 152

D. 2017 年至 2023 年每年 1—7 月中央处理部件进口数量的极差小于出口数量的极差

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 F_1,F_2 分别为曲线 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{k}=1$（$k<4$ 且 $k\neq0$）的左、右焦点，则下列说法正确的是

A. 若 C 为双曲线，且它的一条渐近线方程为 $y=-\frac{1}{2}x$，则 C 的焦距为 $2\sqrt{3}$

B. 若 $k=-3$，过点 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 M，则 $\triangle OF_2M$ 的面积为 $\sqrt{3}$

C. 若 C 为椭圆，且与双曲线 $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{2}=1$ 有相同的焦点，则 k 的值为 1

D. 若 $k=3$，P 为曲线 C 上一点，则 $|PF_1|^2+|PF_2|^2$ 的取值范围是 $[8,16]$

11. 已知函数$f(x)=e^{2x}+ax+1(a\in\mathbf{R})$,则下列说法正确的是

A. 当$a\geqslant0$时,$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增

B. 当$a<0$时,$f(x)$在区间$\left(-\infty,\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$上单调递减,在区间$\left(\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{a}{2}\right),+\infty\right)$上单调递增

C. 当$a=1$时,函数$f(x)$与$g(x)=e^{2x}+e^{x}$的图象有两个不同的公共点

D. 当$a>0$时,若不等式$f(x)-e^{2x}+\frac{a^2}{e^x}\geqslant2a+1$在$x\in(-\infty,2]$时恒成立,则$a$的取值范围是$[e,+\infty)$

12. 已知函数$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,当$0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$时,$f(x_1)=2\sin x_2$,$f(x_2)=m\cos x_1$,则下列说法正确的是

A. x_2可能取$\frac{\pi}{4}$

B. $m<2$

C. 若$m=\frac{3}{2}$,则$11\tan^2x_2-8\tan x_2-1=0$

D. $m>\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知AD为$\triangle ABC$的边BC上的高,$\overrightarrow{AB}=(-4,-2)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,4)$,$\overrightarrow{AD}=(x,1)$,则$x=$________.

14. 若$\forall x>-3$,$\lambda<x+\frac{1}{x+3}$,则实数λ的取值范围是________.

15. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,若$(a-2c\cos B)\sin A=\sqrt{2}a\cos A$,$a=\sqrt{2}$,且$\cos B=-\sin C$,则$bc=$________.

16. 已知函数$f(x)=xe^{ax-1}-\ln x-ax$,若存在$x_0>0$,使得$f(x_0)=0$,则实数a的最小值为________.

四、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知函数$f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$.

(Ⅰ)若$f(x)$的图象上一个最高点到相邻最低点的距离为$\sqrt{16+\pi^2}$,求$f(x)$的单调递增区间;

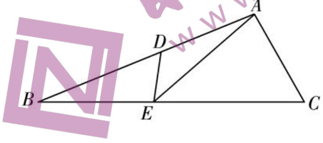
(Ⅱ)若$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$,且$f(x)$在区间$[0,\pi]$上单调,求$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$的值.

18. (12 分)

已知△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且$\sqrt{3}(b^2-c^2)=ab\sin C-\sqrt{3}a\cos B$.

(Ⅰ)求角 C;

(Ⅱ)如图,D,E 分别为边 AB,BC 上的点,且 $AD=AC=2DE=2,CE=3$,求四边形 $ADEC$ 的面积.



19. (12 分)

已知函数$f(x)=(x+2a)\ln x-a$.

(Ⅰ)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(Ⅱ)若$f(x)$没有零点,求实数 a 的取值范围.

20. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=3$,且 $2S_n=(n+1)a_n$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)设 $b_n=(-1)^{\frac{a_na_{n+1}}{6}}\cdot a_n$,$T_n$ 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和,求证:当 $n>3$ 时,$|T_n|<4n$.

21. (12 分)

如图 1,△ABC 是边长为 6 的等边三角形,点 D,E 分别在线段 AC,AB 上,$AE=2,AD=4$,沿 DE 将△ADE 折起到△PDE 的位置,使得 $PB=2\sqrt{5}$,如图 2.

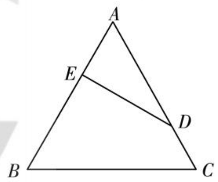


图1

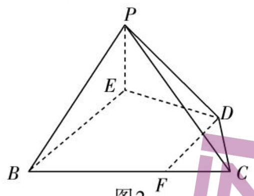


图2

(Ⅰ)求证:平面 $PDE\perp$平面 $BCDE$;

(Ⅱ)若点 F 在线段 BC 上,且直线 DF 与平面 PCD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$,求 BF.

22. (12 分)

已知函数$f(x)=2(x-1)e^x-\lambda(e^{2x}-2)(\lambda\in\mathbf{R})$有两个不同的极值点 x_1,x_2.

(Ⅰ)求 λ 的取值范围;

(Ⅱ)若 $x_1<x_2$,且 $\mu\geqslant 1$,求证:$x_1+\mu x_2>1+\mu$.

2023—2024 学年天一大联考·安徽卓越县中联盟高三(上)期中考试

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 A

命题意图 本题考查集合真子集的定义.

解析 因为集合 P 有 7 个真子集,所以集合 P 中包含 3 个元素,所以 $-1\leqslant m^2-2m<0$,解得 $0<m<2$.

2. 答案 D

命题意图 本题考查复数的四则运算、共轭复数的概念.

解析 由题意得 $z=\frac{1-3i}{2i}+1=\frac{1-i}{2i}=\frac{(1-i)i}{2i^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$,所以 $\bar{z}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

3. 答案 B

命题意图 本题考查函数的图象与性质.

解析 因为 $f(-x)=\frac{(-x)^3-(-x)}{2^{|-x|}+1}=-\frac{x^3-x}{2^{|x|}+1}=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为奇函数,排除 A,C;当 $x=2$ 时,$f(2)=\frac{8-2}{5}=\frac{6}{5}>0$,排除 D,故选 B.

4. 答案 B

命题意图 本题考查平面向量的性质.

解析 因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以 $\sin^2 2x=1+\cos 2x$,所以 $4\sin^2x\cos^2x=2\cos^2x$. 因为 $0<x<\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos x\neq0$,所以 $\sin^2x=\frac{1}{2}$,解得 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$x=\frac{\pi}{4}$.

5. 答案 C

命题意图 本题考查三角函数的诱导公式.

解析 因为 $r=|OP|=2\sqrt{5}$(O 为坐标原点),所以由三角函数的定义,得 $\sin\theta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$,$\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$,所以 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-2\cos(\pi+\theta)=\sin\theta+2\cos\theta=0$.

6. 答案 D

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 由图可知 $f(0)=2\sin\varphi=1$,则 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$,取 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,由五点作图法知 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 为第三个点,则 $\frac{5\pi\omega}{12}+\frac{\pi}{6}=\pi$,解得 $\omega=2$,故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,则 $f(x-\theta)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}-2\theta\right)$. 因为 $f(x-\theta)$ 的图象关于原点对称,所以 $y=f(x-\theta)$ 为奇函数,则 $\frac{\pi}{6}-2\theta=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\theta=\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,故 $|\theta|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{12}$.

7. **答案** C

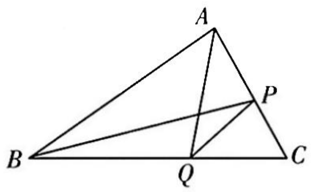
命题意图 本题考查利用函数的单调性比较大小.

解析 设$f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x,x\in(0,+\infty)$,则$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$,可知$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$f(\pi)>f(1)=0$,即$\pi-\frac{1}{\pi}-2\ln\pi>0$,$\pi-\frac{1}{\pi}>2\ln\pi$,所以$a>b$.因为$b-c=2\ln\pi-3\ln 2.1=\ln\pi^2-\ln 2.1^3=\ln\frac{\pi^2}{2.1^3}>\ln\frac{3.1^2}{2.1^3}=\ln\frac{9.61}{9.261}>\ln 1=0$,所以$b>c$.综上,$c<b<a$.

8. **答案** A

命题意图 本题考查平面向量的综合应用.

解析 设$\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{b}$,则$|\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{b}|=3$,$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$.设$\overrightarrow{CQ}=\lambda\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{PA}=t\overrightarrow{PC}$,由题知$0\leqslant\lambda\leqslant1$,$t\leqslant0$,$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\boldsymbol{b}+\lambda\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}+\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PQ}=t\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PQ}=-\lambda\boldsymbol{a}+(t+\lambda-1)\boldsymbol{b}$.因为$\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QA})=3$,所以$[\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b}]\cdot[(1-\lambda)\boldsymbol{a}+(t+\lambda-1)\boldsymbol{b}]=-12\lambda^2+14\lambda+t(1-2\lambda)-2=3$,即$t(1-2\lambda)=12\lambda^2-14\lambda+5$.因为$t\leqslant0$,$12\lambda^2-14\lambda+5>0$,所以$1-2\lambda<0$,即$\frac{1}{2}<\lambda\leqslant1$,所以$-t=\frac{12\lambda^2-14\lambda+5}{2\lambda-1}=\frac{(2\lambda-1)(6\lambda-4)+1}{2\lambda-1}=6\lambda-4+\frac{1}{2\lambda-1}=3(2\lambda-1)+\frac{1}{2\lambda-1}-1\geqslant 2\sqrt{3(2\lambda-1)\cdot\frac{1}{2\lambda-1}}-1=2\sqrt{3}-1$,当且仅当$3(2\lambda-1)=\frac{1}{2\lambda-1}$,即$\lambda=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$时等号成立,所以$|\overrightarrow{PA}|=|t\overrightarrow{PC}|=|t|=-t\geqslant2\sqrt{3}-1$.



二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. **答案** AC

命题意图 本题考查中位数、百分位数、平均数、极差等概念.

解析 对于A,中央处理部件进口数量从小到大排列为343,393,432,583,725,738,869,其中位数为583,故A正确;

对于B,因为40%×7=2.8,所以中央处理部件出口数量的40%分位数为2 083,故B错误;

对于C,中央处理部件出口数量的平均数为$\frac{2\,157+2\,232+2\,083+1\,941+2\,248+2\,398+2\,017}{7}\approx2\,153.7>2\,152$,故C正确;

对于D,中央处理部件进口数量的极差为869-343=526,出口数量的极差为2 398-1 941=457,所以中央处理部件进口数量的极差大于出口数量的极差,故D错误.

10. **答案** BC

命题意图 本题考查双曲线与椭圆的性质.

解析 设曲线 C 的半焦距为 $c(c>0)$.

对于 A,若 C 为双曲线,则 $k<0$,所以$\frac{\sqrt{-k}}{2}=\frac{1}{2}$,解得 $k=-1$,则 $c=\sqrt{5}$,双曲线的焦距为 $2\sqrt{5}$,所以 A 错误;

对于 B,C 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$,$F_2(\sqrt{7},0)$,所以点 F_2 到渐近线的距离 $|MF_2|=\frac{|\sqrt{21}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}}=\sqrt{3}$,又 $|OF_2|=\sqrt{7}$,则 $|OM|=2$,所以 $S_{\triangle OF_2M}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$,所以 B 正确;

对于 C,因为椭圆 C 与双曲线$\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{2}=1$ 有相同的焦点,所以 $4-k=k+2$,解得 $k=1$,故 C 正确;

对于 D,设 $|PF_1|=r_1$,$|PF_2|=r_2$,则 $r_1+r_2=2a=4$,$|PF_1|^2+|PF_2|^2=r_1^2+(4-r_1)^2=2(r_1-2)^2+8$,又 $1=a-c\leqslant r_1\leqslant a+c=3$,所以当 $r_1=2$ 时,$(|PF_1|^2+|PF_2|^2)_{\min}=8$,当 $r_1=1$ 或 3 时,$(|PF_1|^2+|PF_2|^2)_{\max}=10$,所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2$ 的取值范围是 $[8,10]$,故 D 错误.

11. **答案** ABD

命题意图 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 对于 A,由题意得 $f'(x)=2e^{2x}+a$,当 $a\geqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,故 A 正确;

对于 B,当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$,则当 $x<\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$上单调递减,当 $x>\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在区间$\left(\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{a}{2}\right),+\infty\right)$上单调递增,故 B 正确;

对于 C,当 $a=1$ 时,$f(x)=e^{2x}+x+1$,令 $h(x)=f(x)-g(x)=e^{2x}+x+1-(e^{2x}+e^x)=x-e^x+1$,由不等式 $e^x\geqslant x+1$ 恒成立,且仅在 $x=0$ 处取等号,可得 $f(x)\leqslant g(x)$,且仅在 $x=0$ 时取等号,故 C 错误;

对于 D,当 $a>0$ 时,不等式 $f(x)-e^{2x}+\frac{a^2}{e^x}\geqslant 2a+1$ 在 $x\in(-\infty,2]$ 时恒成立等价于 $x+\frac{a}{e^x}\geqslant 2$ 在 $x\in(-\infty,2]$ 时恒成立,即 $a\geqslant 2e^x-xe^x$ 在 $x\in(-\infty,2]$ 时恒成立,令 $k(x)=2e^x-xe^x$,$x\in(-\infty,2]$,则 $k'(x)=2e^x-(e^x+xe^x)=e^x(1-x)$,当 $x<1$ 时,$k'(x)>0$,$k(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增,当 $1<x\leqslant 2$ 时,$k'(x)<0$,$k(x)$ 在区间 $(1,2]$ 上单调递减,故 $k(x)\leqslant k(1)=e$,故 $a\geqslant e$,即实数 a 的取值范围是 $[e,+\infty)$,故 D 正确.

12. **答案** BCD

命题意图 本题考查三角函数的性质及三角恒等变换.

解析 对于 A,由题意,得 $\sqrt{2}\sin\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x_2$,因为当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2}]$,所以 $\sin x_2\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,即 $x_2\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$,又 $x_1<x_2$,所以 $x_1<\frac{\pi}{4}$,$1<\sqrt{2}\sin\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}$,从而可得 $x_2\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$,故 A 错误;

对于 B,由题意,得 $f(x_2)=m\cos x_1$,$m=\frac{f(x_2)}{\cos x_1}$,又由 A 的分析可知 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{4}$,所以 $f(x_2)\in(1,\sqrt{2})$,$\cos x_1\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,所以 $m<\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$,故 B 正确;

对于 C，当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$\begin{cases}f(x_1)=\sin x_1+\cos x_1=2\sin x_2,\\ f(x_2)=\sin x_2+\cos x_2=\frac{3}{2}\cos x_1,\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}\sin x_1=\frac{4}{3}\sin x_2-\frac{2}{3}\cos x_2,\\ \cos x_1=\frac{2}{3}\sin x_2+\frac{2}{3}\cos x_2,\end{cases}$ 所以 $\sin^2x_1+\cos^2x_1=\left(\frac{4}{3}\sin x_2-\frac{2}{3}\cos x_2\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sin x_2+\frac{2}{3}\cos x_2\right)^2=1$，又 $\sin^2x_2+\cos^2x_2=1$，对上式整理得 $12\sin^2x_2-8\sin x_2\cos x_2=1=\sin^2x_2+\cos^2x_2$，所以 $11\tan^2x_2=8\tan x_2+1$，故 C 正确；

对于 D，因为 $\sqrt{2}\sin\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x_2$，且 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{4}$，所以 x_1 随着 x_2 的增大而增大，所以 $m=\frac{\sqrt{2}\sin\left(x_2+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x_1}=\frac{\sin x_2+\cos x_2}{\cos x_1}$ 随着 x_2 的增大而增大，又 $x_2\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $m>\frac{\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}}{\cos 0}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，故 D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** -3

命题意图 本题考查平面向量的垂直.

解析 因为 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(2,6)$，所以由 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ 得 $2x+1\times6=0$，解得 $x=-3$.

14. **答案** $(-\infty,-1)$

命题意图 本题考查基本不等式、充分条件与必要条件.

解析 因为 $x>-3$，所以 $x+3>0$，于是 $x+\frac{1}{x+3}=(x+3)+\frac{1}{x+3}-3\geqslant2\sqrt{(x+3)\cdot\frac{1}{x+3}}-3=-1$，当且仅当 $x+3=\frac{1}{x+3}$，即 $x=-2$ 时取等号，所以 $\lambda<-1$.

15. **答案** $\sqrt{2}$

命题意图 本题考查正弦定理的应用、三角恒等变换.

解析 由 $(a-2c\cos B)\sin A=\sqrt{2}a\cos A$，根据正弦定理，得 $(\sin A-2\sin C\cos B)\sin A=\sqrt{2}\sin A\cos A$. 因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq0$，所以 $\sin A-2\sin C\cos B=\sqrt{2}\cos A$，又 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(B+C)-2\sin C\cos B=\sqrt{2}\cos A$，即 $\sin(B-C)=\sqrt{2}\cos A$. 由 $\cos B=-\sin C=\cos\left(\frac{\pi}{2}+C\right)$，可得 $0<C<\frac{\pi}{2}<B<\pi$，则 $\frac{\pi}{2}<C+\frac{\pi}{2}<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{2}+C$，即 $B-C=\frac{\pi}{2}$，$\sin(B-C)=1$，所以 $\sqrt{2}\cos A=1$，$\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$，由 $\begin{cases}B-C=\frac{\pi}{2},\\ B+C=\frac{3\pi}{4},\end{cases}$ 得 $B=\frac{5\pi}{8}$，$C=\frac{\pi}{8}$. 由正弦定理可得 $\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{b}{\sin\frac{5\pi}{8}}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{8}}=2$，则 $bc=2\sin\frac{5\pi}{8}\cdot2\sin\frac{\pi}{8}=4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

16. **答案** $-\frac{1}{e^2}$

命题意图 本题考查导数、指数函数与对数函数的综合应用.

解析 由 $e^{x-1}\geqslant x$，可知 $f(x)=xe^{ax-1}-\ln x-ax=e^{\ln x+ax-1}-(\ln x+ax)\geqslant0$，当且仅当 $\ln x+ax=1$ 时等号成

立，原条件等价于方程 $a=\frac{1-\ln x}{x}$ 有实根，令 $g(x)=\frac{1-\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{\ln x-2}{x^2}$，可得 $g(x)_{\min}=g(e^2)=-\frac{1}{e^2}$，

所以 a 的最小值为 $-\frac{1}{e^2}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查三角函数的性质.

解析 （Ⅰ）设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由已知得 $\sqrt{4^2+\left(\frac{T}{2}\right)^2}=\sqrt{16+\pi^2}$，

解得 $T=2\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$，

所以 $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. ……（2 分）

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. ……（4 分）

（Ⅱ）由 $f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$，知函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称，

所以 $\frac{\pi\omega}{4}-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\omega=4k+\frac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$. ……（6 分）

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right]$，

又 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调，所以 $\omega\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$， ……（8 分）

当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{2}{3}$，满足条件，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$， ……（9 分）

则 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin\frac{5\pi}{6}=1$. ……（10 分）

18. **命题意图** 本题考查余弦定理、解三角形.

解析 （Ⅰ）由余弦定理得 $\sqrt{3}b^2-\sqrt{3}c^2=ab\sin C-\sqrt{3}ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$， ……（2 分）

所以 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C$， ……（3 分）

再由余弦定理可得 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C$，即 $\tan C=\sqrt{3}$. ……（5 分）

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……（6 分）

（Ⅱ）设 $\angle ADE=\theta$.

由余弦定理得 $AE^2=DE^2+AD^2-2DE\cdot AD\cos\theta=CE^2+AC^2-2CE\cdot AC\cos C$，

即 $1^2+2^2-2\times1\times2\cos\theta=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{2}$，整理得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$， ……（8 分）

因为 $0<\theta<\pi$,所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$. ……（9 分）

故四边形 $ADEC$ 的面积为

$S=S_{\triangle AED}+S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}DE\cdot AD\sin\theta+\frac{1}{2}EC\cdot AC\sin C$

$=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. ……（12 分）

19. **命题意图** 本题考查曲线的切线方程,及导数的综合应用.

解析 （Ⅰ）当 $a=1$ 时,$f(x)=x\ln x+2\ln x-1$,$f'(x)=\ln x+1+\frac{2}{x}$, ……（2 分）

所以 $f'(1)=3$, ……（3 分）

又 $f(1)=-1$,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+1=3(x-1)$,即 $3x-y-4=0$. …（5 分）

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 没有零点,所以方程 $(1-2\ln x)a=x\ln x$ 无实根. ……（6 分）

当 $x=\sqrt{e}$ 时,方程不成立,所以 $x\neq\sqrt{e}$,故方程 $\frac{x\ln x}{1-2\ln x}=a$ 无实根,即直线 $y=a$ 与曲线 $y=\frac{x\ln x}{1-2\ln x}$ 没有公共点. ……（7 分）

令 $g(x)=\frac{x\ln x}{1-2\ln x}$,则 $g'(x)=\frac{-2(\ln x)^2+\ln x+1}{(1-2\ln x)^2}=-\frac{(\ln x-1)(2\ln x+1)}{(1-2\ln x)^2}$.

令 $g'(x)<0$,得 $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ 或 $x>e$,令 $g'(x)>0$,得 $\frac{1}{\sqrt{e}}<x<\sqrt{e}$ 或 $\sqrt{e}<x<e$,

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$,$(e,+\infty)$ 上单调递减,在区间 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\sqrt{e}\right)$,$(\sqrt{e},e)$ 上单调递增, ……（9 分）

所以当 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时,$g(x)$ 取得极小值 $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{e}}$,当 $x=e$ 时,$g(x)$ 取得极大值 $g(e)=-e$.

因为 $-e<-\frac{1}{4\sqrt{e}}$,且当 x 从左侧趋向于 $\sqrt{e}$ 时,$g(x)$ 趋向于 $+\infty$,当 x 从右侧趋向于 $\sqrt{e}$ 时,$g(x)$ 趋向于 $-\infty$,

……（11 分）

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-e,-\frac{1}{4\sqrt{e}}\right)$. ……（12 分）

20. **命题意图** 本题考查数列的性质.

解析 （Ⅰ）$\because 2S_n=(n+1)a_n$,$\therefore 2S_{n-1}=na_{n-1}(n\geqslant2)$,

$\therefore 2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$, ……（2 分）

$\therefore (n-1)a_n=na_{n-1}$,即 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}$, ……（3 分）

$\therefore \frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots=\frac{a_1}{1}=3$,

$\therefore a_n=3n$. ……（5 分）

（Ⅱ）由条件知 $b_n=(-1)^{\frac{a_na_{n+1}}{6}}\cdot a_n=(-1)^{\frac{3}{2}n(n+1)}\cdot a_n$,

则当 $n=4k$ 或 $4k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,$b_n=a_n$,当 $n=4k-2$ 或 $4k-3(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,$b_n=-a_n$. ……（7 分）

注意到当 $n=4k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$b_{n-3}+b_{n-2}+b_{n-1}+b_n=-a_{n-3}-a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=-3(n-3)-3(n-2)+3(n-1)+3n=12$，…………（8分）

$\therefore$ 当 $n=4k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$T_n=12\times\frac{n}{4}=3n$，$|T_n|=3n<4n$；

当 $n=4k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$T_n=T_{n+1}-a_{n+1}=3(n+1)-3(n+1)=0$，$|T_n|<4n$ 显然成立；

当 $n=4k-2(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，$T_n=T_{n+1}-a_{n+1}=0-3(n+1)=-3n-3$，

从而当 $n>3$ 时，$|T_n|=3n+3<4n$；

当 $n=4k-3(k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant2)$ 时，$T_n=T_{n-1}-a_n=3(n-1)-3n=-3$，$|T_n|=3<4n$.

综上可知，当 $n>3$ 时，$|T_n|<4n$. …………（12分）

21. **命题意图** 本题考查面面垂直的证明，以及利用空间向量计算直线与平面所成的角.

解析 （Ⅰ）在 $\triangle PED$ 中，$PE=2$，$PD=4$，$\angle EPD=60°$，

由余弦定理得 $DE^2=PE^2+PD^2-2PE\cdot PD\cos\angle EPD=12$，

所以 $PE^2+ED^2=PD^2$，所以 $PE\perp ED$. …………（2分）

在 $\triangle PEB$ 中，$PE=2$，$BE=4$，$PB=2\sqrt{5}$，

所以 $PE^2+EB^2=PB^2$，所以 $PE\perp BE$. …………（3分）

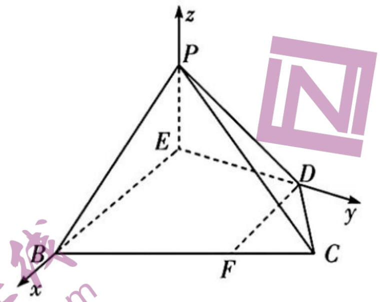
又因为 $BE\cap DE=E$，所以 $PE\perp$ 平面 $BCDE$，…………（4分）

所以平面 $PDE\perp$ 平面 $BCDE$. …………（5分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 EB,ED,EP 两两互相垂直，以 E 为原点，EB,ED,EP 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(0,2\sqrt{3},0)$，$B(4,0,0)$，$P(0,0,2)$，$C(1,3\sqrt{3},0)$. …………（6分）

所以 $\overrightarrow{PC}=(1,3\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{DC}=(1,\sqrt{3},0)$，设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=x+3\sqrt{3}y-2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$ 令 $y=-1$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$. …………（8分）



设 $BF=m(m>0)$，则 $F\left(4-\frac{1}{2}m,\frac{\sqrt{3}}{2}m,0\right)$，所以 $\overrightarrow{DF}=\left(4-\frac{1}{2}m,\frac{\sqrt{3}}{2}m-2\sqrt{3},0\right)$. …………（9分）

因为直线 DF 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $|\cos\langle\overrightarrow{DF},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{\sqrt{21}}{7}$，即 $\frac{\left|4\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}m-\frac{\sqrt{3}}{2}m+2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{7}\times\sqrt{\left(4-\frac{1}{2}m\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m-2\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，…………（11分）

解得 $m=4$,即 $BF=4$. ……………………………………………………………………(12 分)

22. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)由题意可得 $f'(x)=2xe^x-2\lambda e^{2x}=2e^x(x-\lambda e^x)$.

由题意知方程 $f'(x)=0$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2,即方程 $\lambda=\frac{x}{e^x}$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2,也即直线 $y=\lambda$ 与函数 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ 的图象有两个不同的交点. ……………………………………(2 分)

因为 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,所以当 $x<1$ 时,$g'(x)>0$,当 $x>1$ 时,$g'(x)<0$,

则 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$. ……………………(4 分)

又因为 $g(0)=0$,当 $x>0$ 时,$g(x)>0$,当 $x<0$ 时,$g(x)<0$,当 x 趋向于 $+\infty$ 时,$g(x)$ 趋向于 0,

所以 λ 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$. ……………………………………………………………(5 分)

(Ⅱ)方法一:因为 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1,x_2,

由(Ⅰ)可知 x_1,x_2 是方程 $x-\lambda e^x=0$ 的两个实数根,所以 $x_1=\lambda e^{x_1},x_2=\lambda e^{x_2}$, ……………………………(6 分)

所以不等式 $x_1+\mu x_2>1+\mu$ 等价于 $\lambda e^{x_1}+\lambda\mu e^{x_2}>1+\mu$,即 $\lambda(e^{x_1}+\mu e^{x_2})>1+\mu$.

因为 $\mu\geq1$,所以待证不等式等价于 $\lambda>\frac{1+\mu}{e^{x_1}+\mu e^{x_2}}$.

由 $x_1=\lambda e^{x_1},x_2=\lambda e^{x_2}$,作差得 $x_1-x_2=\lambda(e^{x_1}-e^{x_2})$,即 $\lambda=\frac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}$,

所以待证不等式等价于 $\frac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}>\frac{1+\mu}{e^{x_1}+\mu e^{x_2}}$. ……………………………………………(8 分)

令 $t=x_1-x_2$,则 $x_1=t+x_2$,

又因为 $x_1<x_2$,所以 $t\in(-\infty,0)$,

则不等式 $\frac{t}{e^{t+x_2}-e^{x_2}}>\frac{1+\mu}{e^{t+x_2}+\mu e^{x_2}}$,即 $t<\frac{(1+\mu)(e^t-1)}{e^t+\mu}$ 在 $t\in(-\infty,0)$ 时恒成立. ……………………(9 分)

令 $h(t)=t-\frac{(1+\mu)(e^t-1)}{e^t+\mu}$,则 $h'(t)=1-\frac{(1+\mu)^2e^t}{(e^t+\mu)^2}=\frac{(e^t-1)(e^t-\mu^2)}{(e^t+\mu)^2}$,

因为 $\mu\geq1$,可得当 $t\in(-\infty,0)$ 时,$h'(t)>0$,所以 $h(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,

又 $h(0)=0$,所以在 $t\in(-\infty,0)$ 时,$h(t)<0$, ………………………………………………………(11 分)

所以 $t<\frac{(1+\mu)(e^t-1)}{e^t+\mu}$ 在 $t\in(-\infty,0)$ 时恒成立,即 $\frac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}>\frac{1+\mu}{e^{x_1}+\mu e^{x_2}}$ 在 $x_1<x_2$,且 $\mu\geq1$ 时恒成立,

所以 $x_1+\mu x_2>1+\mu$. …………………………………………………………………………(12 分)

方法二:由(Ⅰ)可知 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,x_1,x_2 是方程 $g(x)=\lambda$ 的两个实根,

所以 $x_1<1<x_2$,且 $g(x_1)=g(x_2)$. ……………………………………………………………(6 分)

设 $F(x)=g(x)-g(2-x)$, ………………………………………………………………………(7 分)

则 $F'(x)=g'(x)+g'(2-x)=\frac{1-x}{e^{x}}+\frac{x-1}{e^{2-x}}=(x-1)\left(\frac{1}{e^{2-x}}-\frac{1}{e^{x}}\right)$,

当 $x>1$ 时,$e^{x}>e^{2-x}>0$,$\frac{1}{e^{2-x}}>\frac{1}{e^{x}}$,所以 $F'(x)>0$, …………………………………………(8 分)

所以 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x>1$ 时,$F(x)>F(1)=0$,即 $g(x)>g(2-x)$. ………………………………………………(9 分)

因为 $x_2>1$,所以 $g(x_2)>g(2-x_2)$,所以 $g(x_1)>g(2-x_2)$,

因为 $x_1<1$,$2-x_2<1$,所以 $x_1>2-x_2$,即 $0<1-x_1<x_2-1$. ………………………………(11 分)

又因为 $\mu\geqslant 1$,所以 $1-x_1<\mu x_2-\mu$,整理得 $x_1+\mu x_2>1+\mu$. ………………………………(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。