2023-2024 学年度第一学期期中学业水平检测高三数学评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1--8：D A A C　B C A B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。（选不全得 2 分）

9．BCD　10．AC　11．BCD　12．ABD

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。（16 题第一个空 2 分，第二个空 3 分）

13．$y=-e^{3}x$；　14．6；　15．3；　16．（1）$\sqrt{14}$；（2）2．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

解：（1）因为 $CD\perp PA$，$CD\perp AD$，$PA\cap AD=A$，

所以 $CD\perp$ 平面 PAD ……3 分

又因为 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD ……4 分

（2）记 AD 中点为 F，因为 $PA=PD$，所以 $PF\perp AD$ ……5 分

又因为平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAD=AD$，所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$ ……6 分

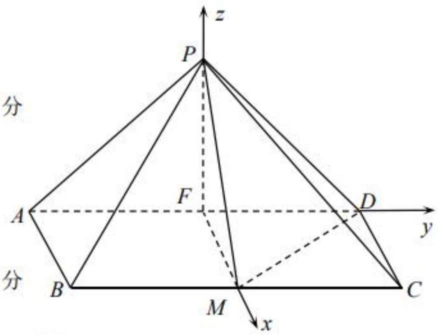
故以 F 为坐标原点，分别以 FM,FD,FP 所在射线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图空间直角坐标系，

所以 $P(0,0,2),M(2,0,0),D(0,2,0),C(2,2,0)$，……7 分

设平面 PDM 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PM}=0\end{cases}$，$\begin{cases}2y_1-2z_1=0\\2x_1-2z_1=0\end{cases}$，

令 $z_1=1$，可得 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$ ……8 分



设平面 PCD 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，$\begin{cases}2x_2+2y_2-2z_2=0\\2y_2-2z_2=0\end{cases}$，

令 $z_2=1$，可得 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,1)$ ……9 分

设平面 PDM 与平面 PCD 夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>|=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ……10 分

18.（12 分）

解：（1）因为 $\sin^2A+\sin^2B+4\sin A\sin B\cos C=0$，

由正弦定理知：$a^2+b^2=-4ab\cos C$ ① ……2 分

又由余弦定理知：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ② ……3 分

由①②得：$\cos C=-\dfrac{c^2}{6ab}$ ……4 分

又因为 $c^2=3ab$，所以 $\cos C=-\dfrac{c^2}{6ab}=-\dfrac{3ab}{6ab}=-\dfrac{1}{2}$ ……5 分

因为 $c\in(0,\pi)$，所以 $C=\dfrac{2\pi}{3}$ ……6 分

（2）因为 $T\ge 2(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{7})=\dfrac{5\pi}{7}$，所以 $\dfrac{2\pi}{\omega}\ge\dfrac{5\pi}{7}$，$\omega\le\dfrac{14}{5}$，

因为 $\omega\in N^*$，所以 $\omega=1$ 或 $\omega=2$ ……8 分

若$\omega=1$，则$f(x)=\sin(x+\varphi)$，因为$f(C)=-\frac{1}{2}$，所以$\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=-\frac{1}{2}$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{2\pi}{3}+\varphi\in(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，所以无解…………10分

若$\omega=2$，则$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，因为$f(C)=-\frac{1}{2}$，所以$\sin(\frac{4\pi}{3}+\varphi)=-\frac{1}{2}$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{4\pi}{3}+\varphi\in(\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$，所以$\frac{4\pi}{3}+\varphi=\frac{7\pi}{6}$，解得$\varphi=-\frac{\pi}{6}$…………11分

此时$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$在$(\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{2})$上不单调，所以$\varphi$无解…………12分

19.（12分）

解：（1）由题$f'(x)=a-\frac{1}{x}$，$x>0$…………1分

当$a\le 0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；…………3分

当$a>0$时，由$f'(x)=0$解得$x=\frac{1}{a}$…………4分

所以，当$x\in(0,\frac{1}{a})$时，$f'(x)<0$；当$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$时，$f'(x)>0$；

所以，$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递减，在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递增；…………6分

（2）由（1）知：当$a>0$时，$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{a})=1+\ln a$…………7分

所以，存在$a>0$，使$1+\ln a\ge\frac{a^2}{2}+b$成立，即存在$a>0$，使$1+\ln a-\frac{a^2}{2}\ge b$成立…8分

令$g(a)=1+\ln a-\frac{a^2}{2}$，则$g'(a)=\frac{1}{a}-a=\frac{1-a^2}{a}$…………9分

所以，$g(a)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，…………10分

所以$g(a)\le g(1)=\frac{1}{2}$…………11分

所以b的取值范围为$(-\infty,\frac{1}{2}]$…………12分

20.（12分）

解：（1）因为$AP\perp BD$，$PC\perp BD$，$AP\cap PC=P$，所以$BD\perp$平面APC……1分

所以$BD\perp AC$…………2分

因为四边形$ABCD$是圆柱底面的内接四边形，且AC为其直径

所以$BE=ED$，$AB=AD$，$BC=CD$，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$…………4分

又因为$AC=BC+CD$，所以$AC=2BC$，

所以在$\mathrm{RT}\Delta ABC$中，$\sin\angle BAC=\frac{1}{2}$，所以$\angle BAC=30^\circ$

所以$\angle BAD=60^\circ$，ΔBAD是等边三角形…………5分

（2）因为$AC=4$，由（1）知，在$\mathrm{RT}\Delta ABC$中，$AE=3$，$EC=1$，

所以$CE:EA=1:3$…………6分

因为$PF:FA=1:3$，所以$PC // EF$

又因为$PC \not\subset$平面BFD，$EF \subset$平面BFD，所以$PC // $平面$BFD$ ······················ 7分

所以点P到平面FBD的距离等于点C到平面FBD的距离··9分

因为$CE \perp PC$，所以$CE \perp EF$，又因为$CE \perp BD$，$EF \cap BD = E$，

所以$CE \perp$平面BFD，·· 10分

所以点C到平面FBD的距离为$CE=1$，点P到平面FBD的距离为1·················· 12分

21.（12分）

解：（1）由题知，在$\triangle ACD$中，由正弦定理得$\sin\angle CAD=\dfrac{CD\cdot\sin\angle ACD}{AD}=\dfrac{1}{2}$····2分

因为$AD>CD$，所以$\angle ACD>\angle CAD$，所以$\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$ ································· 3分

所以$\angle D=\pi-\angle ACD-\angle CAD=\dfrac{\pi}{2}$，所以$AD\perp CD$ ···································4分

（2）在$\triangle ABC$中，$AC=2$ ···5分

由余弦定理知：$\cos\angle ABC=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ·····························6分

所以$AB^2+BC^2=4+\sqrt{3}AB\cdot BC$，所以$2AB\cdot BC\le 4+\sqrt{3}AB\cdot BC$

解得：$AB\cdot BC\le\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}=8+4\sqrt{3}$，等号当仅当$AB=BC$时取························ 7分

所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B\le 2+\sqrt{3}$ ···8分

（3）在$\triangle ABC$中，设$\angle BAC=\theta\in(0,\dfrac{5\pi}{6})$，由正弦定理知：$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin\angle B}$

所以$AB=4\sin(\dfrac{5\pi}{6}-\theta)$，$AE=2\sin(\dfrac{5\pi}{6}-\theta)$ ··9分

在$\triangle ADE$中，由余弦定理知：$DE^2=AD^2+AE^2-2AD\cdot AE\cos\angle DAE$

$$\begin{aligned}\text{所以}DE^2&=3+4\sin^2(\frac{5\pi}{6}-\theta)-4\sqrt{3}\sin(\frac{5\pi}{6}-\theta)\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)\\&=3+4\sin^2(\frac{\pi}{6}+\theta)-4\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{6}+\theta)\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)\\&=5-2\cos(\frac{\pi}{3}+2\theta)-2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}+2\theta)=5-4\sin(\frac{\pi}{3}+2\theta+\frac{\pi}{6})\\&=5-4\sin(\frac{\pi}{2}+2\theta)=5-4\cos 2\theta\in(1,9]\end{aligned}$$ ······ 11分

所以$DE^2\le 9$，等号当仅当$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$时取，所以$DE$的最大值等于3··············12分

22.（12分）

解：（1）因为$f'(x)=e^x-2ax-1$，··· 1分

设$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=e^x-2a$，··2分

当 $a\le 0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增且 $f'(0)=0$；
所以，若 $x<0$，则 $f'(x)<0$；不合题意……………………………………………………3 分
当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$ 解得：$x=\ln 2a$，
所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $f'(x)\ge f'(\ln 2a)=2a-2a\ln 2a-1(a>0)$ ……………………………………4 分
令 $h(x)=x-x\ln x-1(x>0)$，则 $h'(x)=-\ln x$；
所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，…………………………… 5 分
所以 $f'(x)_{\min}=f'(\ln 2a)\le h(1)=0$，
即只有 $a=\frac{1}{2}$，满足 $f'(x)\ge 0$，所以，a 的值为 $\frac{1}{2}$ ……………………………………6 分

（2）由题知 $a>\frac{1}{2}$，$\ln 2a>0$，由（1）知：$f'(x)_{\min}=f'(\ln 2a)<0$ 且 $f'(0)=0$
当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；
当 $x\in(0,\ln 2a)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减；
所以 $x=x_1=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点……………………………………………………… 7 分
由（1）知：$e^x\ge x+1>x$，所以 $e^x=(e^{\frac{x}{2}})^2>\frac{x^2}{4}$
所以 $f'(x)>\frac{x^2}{4}-2ax-1$，即，当 $x>10a$ 时，$f'(x)>5a^2-1>0$ ………………8 分
所以，存在 $x_2\in(\ln 2a,10a)$ 使得 $f'(x_2)=0$
当 $x\in(\ln a,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(\ln a,x_2)$ 上单调递减；
当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增；
所以，$x=x_2$ 为 $f(x)$ 的极小值点，即 $f(x)$ 有两个极值点………………………… 9 分
因为 $2a=\frac{e^{x_2}-1}{x_2}$，所以 $f(x_2)=(1-\frac{x_2}{2})e^{x_2}-\frac{x_2}{2}$，
所以，要证 $f(x_2)<1+\frac{\sin x_2-x_2}{2}$，只需证 $(1-\frac{x_2}{2})e^{x_2}<1+\frac{\sin x_2}{2}$
即证 $2-x_2-\frac{2+\sin x_2}{e^{x_2}}<0$ …………………………………………………………10 分
设 $n(x_2)=2-x_2-\frac{2+\sin x_2}{e^{x_2}},x_2>0$，则 $n'(x_2)=\frac{2+\sin x_2-\cos x_2}{e^{x_2}}-1$
再设 $\varphi(x_2)=n'(x_2)$，则 $\varphi'(x_2)=\frac{2(\cos x_2-1)}{e^{x_2}}\le 0$…………………………………… 11 分
所以 $n'(x_2)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $n'(x_2)<n'(0)=0$
所以 $n(x_2)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $n(x_2)<n(0)=0$
命题得证……………………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索