2023~2024 学年度第一学期高三年级期中抽测

数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、

在答题卡上.用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答卡相应位置上.将条形

“条形码粘贴处”

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目

黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4．考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3\}$，$B=\{1,2,5\}$，则 $A\cup(\complement_U B)=$

A．$\{1,3,4\}$　　B．$\{1,3\}$　　C．$\{1,2,5\}$　　D．$\{1,2,4,5\}$

【答案】A

【解析】$\complement_U B=\{3,4\}$，$A\cup(\complement_U B)=\{1,3,4\}$，选 A.

2．若 $\dfrac{z-2}{1+i}=i$，则 $\overline{z}$ 在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】D

【解析】$z-2=i(1+i)=-1+i$，$\therefore z=1+i$，$\overline{z}=1-i$ 位于第四象限，选 D.

3．抛掷一枚质地均匀的骰子，将得到的点数记为 a，则 a，4，5能够构成钝角三角形的概率

是

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{6}$

【答案】D

【解析】a，4，5为钝角三角形，则$a=2$，$P=\frac{1}{6}$，选D.

4．已知向量$\boldsymbol{a}=(0,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,t)$，若向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A．-2　　B．$-\frac{5}{2}$　　C．2　　D．$\frac{11}{2}$

【答案】A

【解析】$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{a}$，$\therefore\frac{-2t}{4}=-\frac{1}{2}$，$\therefore t=1$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，选A.

5．已知等比数列$\{a_n\}$的首项为3，则“$a_9<a_{11}$”是“$a_{11}<a_{14}$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

【答案】B

【解析】$a_9<a_{11}$，则$q^8<q^{10}$，$\therefore q^2>1\Rightarrow q>1$或$q<-1$

$q<-1$时，$a_{11}-a_{14}=a_1q^{10}(1-q^3)>0$，$\therefore a_{11}>a_{14}$，不充分.

$a_{11}<a_{14}$，则$q^{10}<q^{13}$，$\therefore q>1$，则$q^8<q^{10}$，即$a_9<a_{11}$，必要，选B.

6．已知$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$，$-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{6}$，则$\tan\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=$

A．$-\frac{24}{25}$　　B．$\frac{24}{25}$　　C．$\frac{7}{24}$　　D．$-\frac{7}{24}$

【答案】C

【解析】$\tan\left(2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan 2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{\cos 2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$

$=-\frac{\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{\frac{9}{25}-\frac{16}{25}}{2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}}=\frac{7}{24}$，选C.

7．已知$y=f(x-1)$为偶函数，当$x\geq-1$时，$f(x)=\ln(x^2+2x+3)$.若$f(x_1)>f(x_2)$，则

A．$(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)<0$　B．$(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)>0$

C．$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)<0$　D．$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)>0$

【答案】D

【解析】$y=f(x-1)$为偶函数，则$f(x)$关于$x=-1$对称.

$x\geq-1$时，$f(x)=\ln(x^2+2x+3)\nearrow$，则$f(x)$在$(-\infty,-1)\swarrow$，$f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore|x_1+1|>|x_2+1|$.

①$x_1,x_2<-1$时，$-x_1-1>-x_2-1$，$\therefore x_1-x_2<0$，$x_1+x_2+2<0$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)>0$，D对.

②$x_1<-1<x_2$时，$-x_1-1>x_2+1$，$x_1+x_2+2<0$，$x_1<x_2$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)>0$，D对.

③$x_1,x_2>-1$，则$x_1+1>x_2+1$，$\therefore x_1-x_2>0$，$x_1+x_2+2>0$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)>0$，D对，选D.

8．已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，过点$(0,3)$的直线与C交于A,B两点，线段AB的垂直平分线与x轴交于点D，若$AF+BF=6$，则$\triangle ABD$的面积为

A．$\frac{3\sqrt{5}}{2}$　B．$3\sqrt{5}$　C．$\frac{5\sqrt{7}}{2}$　D．$5\sqrt{7}$

【答案】C

【解析】$AB: y=kx+3$，$\begin{cases} y=kx+3 \\ y^2=4x \end{cases}$ 消 y 可得 $k^2x^2+(6k-4)x+9=0$

$\Delta>0$，则 $k<\frac{1}{3}$ 令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$x_1+x_2=\frac{4-6k}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{9}{k^2}$

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+6=\frac{4}{k}$，$AB$ 中点 $\left(\frac{2-3k}{k^2},\frac{2}{k}\right)$

$AF+BF=x_1+1+x_2+1=\frac{4-6k}{k^2}+2=6$，$\therefore k=-2$ 或 $\frac{1}{2}$ 舍

AB 垂直平分线：$y-\frac{2}{k}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{2-3k}{k^2}\right)$，令 $y=0$，$x=\frac{2k^2-3k+2}{k^2}=1$，$D(4,0)$，

$AB=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{k^2+1}\sqrt{1-3k}}{k^2}=\frac{4\sqrt{5}\sqrt{7}}{4}=\sqrt{35}$

D 到 AB 距离 $d=\frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\sqrt{35}\sqrt{5}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$，选 C.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．为调研某地空气质量，连续10天测得该地PM2.5（PM2.5是衡量空气质量的重要指标，单位：ug/m^3）的日均值，依次为36,26,17,23,33,106,42,31,30,33，则

A．前4天的极差大于后4天的极差　　B．前4天的方差小于后4天的方差

C．这组数据的中位数为31或33　　D．这组数据的第60百分位数与众数相同

【答案】AD

【解析】前四天极差为19，后四天极差12，A 对.

前4天方差大于后4天的方差，17,23,26,30,31,33,33,36,42,106，中位数32，C 错.

$10\times 60\%=6$，第60百分位$=\frac{33+33}{2}=33$为众数，D 对，选 AD.

10．已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 在 $x=\frac{5\pi}{12}$ 处取得极小值 -2，与

此极小值点相邻的 $f(x)$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$，则

A．$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$　　B．$y=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$是奇函数

C．$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减　　D．$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$上的值域为$[-2,\sqrt{3})$

【答案】ABD

【解析】$f(x)_{\min}=-2$，$\therefore A=2$，$f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$，$\frac{T}{4}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$

$\therefore T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore \omega=2$，$f(x)=2\cos(2x+\varphi)$，$f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=2\cos\left(\frac{5}{6}\pi+\varphi\right)=-2$

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{6}$，$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

对于 A，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　A 对.

对于 B，$f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$为奇函数，B 对.

对于 C，$-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$没有单调性，C 错.

对于 D，$\frac{\pi}{4}\le x<\frac{5}{6}\pi$，$\frac{\pi}{2}\le 2x<\frac{5}{3}\pi$，$\frac{2\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$，$-1\le\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-2\le f(x)<\sqrt{3}$，D 对，选 ABD.

11．在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是棱 BC,CD 的中点，则

A．B_1D_1 与 EF 是异面直线

B．存在点 P，使得 $\overrightarrow{A_1P}=2\overrightarrow{PF}$，且 $BC\,//$ 平面 APB_1

C．A_1F 与平面 B_1EB 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D．点 B_1 到平面 A_1EF 的距离为 $\frac{4}{5}$

【答案】BC

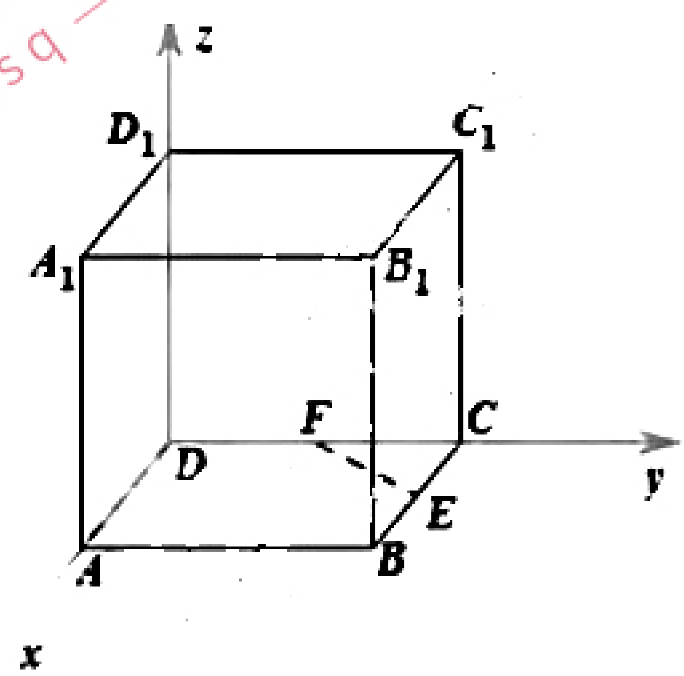
【解析】$EF // BD$，则 $EF // B_1D_1$，则 EF 与 B_1D_1 不异面，A 错.

建系，$A_1(2,0,2)$，$F(0,1,0)$，$\overrightarrow{A_1P}=2\overrightarrow{PF}$，$\therefore P\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，

$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，面 APB_1 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=0\\ 2y+2z=0\end{cases}$，不妨设 $y=1$，则 $z=-1$，$x=0$，$\vec{n}=(0,1,-1)$，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\therefore BC //$ 平面 APB_1，B 对.



$\overrightarrow{A_1F}=(-2,1,-2)$，面 B_1EB 的法向量 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，

A_1F 与面 B_1EB 所成角为 α，$\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1F}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\frac{2}{3\times 2}=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，C 对.

面 A_1EF 的法向量 $\vec{m}=(x_0,y_0,z_0)$，$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1F}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}-2x_0+y_0-2z_0=0\\ x_0+y_0=0\end{cases}$

不妨设 $x_0=2$，则 $y_0=-2$，$z_0=-3$，$\vec{n}=(2,-2,-3)$，

$d=\frac{\left|\overrightarrow{B_1A_1}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\vec{m}\right|}=\frac{4}{\sqrt{17}}$，D 错，选 BC.

12．已知函数 $f(x)=a(x-1)+(x+1)\ln x$，$a\in\mathbf{R}$，则下列说法正确的是

A．当 $a=\ln\frac{1}{8}$ 时，$f(2)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

B．当$a>0$时，$f(a)<2a^2-a$

C．若$f(x)$是增函数，则$a>-2$

D．若$f(x)$和$f'(x)$的零点总数大于2，则这些零点之和大于5

【答案】ABD

【解析】方法一：对于A，$f(x)=(x-1)\ln\frac{1}{8}+(x+1)\ln x$，$f(2)=\ln\frac{1}{8}+3\ln 2=0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{8}+\frac{3}{2}\ln\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{8}=0$，$\therefore f(2)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，A对.

对于B，$f(a)=a(a-1)+(a+1)\ln a=a^2-a+(a+1)\ln a$，

令$g(a)=a^2-a+(a+1)\ln a-(2a^2-a)=-a^2+(a+1)\ln a$，

$g'(a)=-2a+\ln a+\frac{a+1}{a}=\ln a-2a+1+\frac{1}{a}$，

$g''(a)=\frac{1}{a}-2-\frac{1}{a^2}=\frac{a-2a^2-1}{a^2}=\frac{-(2a^2-a+1)}{a^2}<0$，

$g'(a)$在$(0,+\infty)$↙，$g'(1)=0$，$\therefore a\in(0,1)$时，$g'(a)>0$，$g(a)$↗，

$a\in(1,+\infty)$时，$g'(a)<0$，$g(a)$↙，$g(a)_{\max}=g(1)=-1<0$，B对.

对于C，$f'(x)=a+\ln x+\frac{x+1}{x}\geq 0$在$(0,+\infty)$恒成立，$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}=0$

$x=1$，$f'(x)$在$(0,1)$↙，$(1,+\infty)$↗，$f'(x)_{\min}=f'(1)=a+2\geq 0$，$\therefore a\geq -2$，C错.

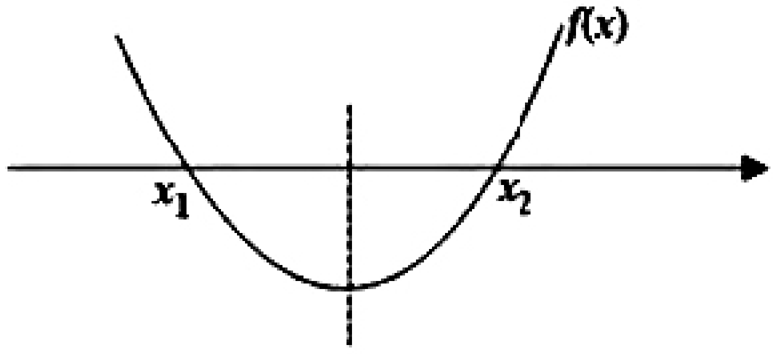
对于D，$f(1)=0$，1是$f(x)$的一个零点，当$a=-2$时，$f'(x)=-2+\ln x+\frac{x+1}{x}\geq 0$

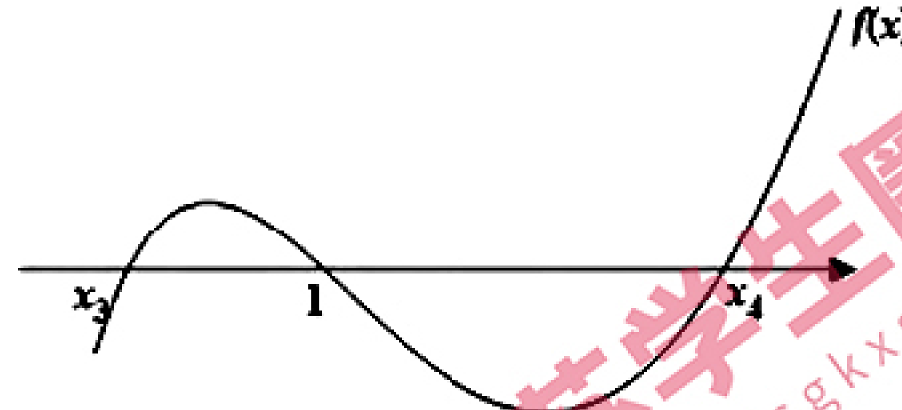
$f'(x)=0$有且仅有一个根1，此时$f(x)$在$(0,+\infty)$↗，$f(x)$与$f'(x)$都有且仅有一个零点，

总数不大于2.当$a>-2$时，$f'(x)>0$，$f'(x)$无零点，$f(x)$有且仅有一个零点，

$f(x)$与$f'(x)$零点和不大于2.当$a<-2$时，$f'(x)$有两个零点x_1,x_2，$x_1+x_4>2$.

$f(x)$在$(0,x_1)$↗，(x_1,x_2)↙，$(x_2,+\infty)$↗，此时$f(x)$有3个零点$x_3,1,x_4$





$x_3+x_4>2$，$\therefore x_1+x_2+1+x_3+x_4>5$，D对，选ABD.

方法二：对于A，$f\left(\frac{1}{x}\right)=a\left(\frac{1}{x}-1\right)+\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}[a(x-1)+(x+1)\ln x]=-\frac{1}{x}f(x)$，

$a=\ln\frac{1}{8}$时，而$f(2)=0$，$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$\therefore f(2)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，A正确.

对于B，$f(a)-2a^2+a=a^2-a+(a+1)\ln a-2a^2+a=(a+1)\ln a-a^2$

$<(a+1)(a-1)-a^2=-1<0$，B正确.

对于C，$f'(x)=a+\ln x+1+\frac{1}{x}\geq 0$对$\forall x>0$恒成立，$\therefore -a\leq\left(\ln x+\frac{1}{x}+1\right)_{\min}$

令$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，$g(x)_{\min}=g(1)=2$，

$\therefore -a\leq 2$，$a\geq -2$，C错.

对于D，若$f(x)$，$f'(x)$的零点总数大于2，则$f'(x)_{\min}=2+a<0\Rightarrow a<-2$，

此时$f'(x)$在$(0,1)$和$(1,+\infty)$上各有一个零点x_1,x_2

$$\therefore\begin{cases}\ln x_1+\frac{1}{x_1}+1+a=0\\ \ln x_2+\frac{1}{x_2}+1+a=0\end{cases}\Rightarrow\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=x_1x_2>\sqrt{x_1x_2}\Rightarrow x_1x_2>1$$

$\therefore x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2$，且$f(x)$在$(0,x_1)$上$\nearrow$；$(x_1,x_2)$上$\swarrow$；$(x_2,+\infty)$上$\nearrow$

且$f(1)=0$，$\therefore f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$，$f(x)$在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上各有一个零点x_3,x_4，

$\because f(1)=0$，$\therefore f(x)$还有一个零点为1，由对A分析知$x_4=\frac{1}{x_3}$，

$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4+1=(x_1+x_2)+\left(x_3+\frac{1}{x_3}\right)+1>2+2+1=5$，D正确.

选：ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知随机变量 $X\sim N(5,\sigma^2)$，且 $P(X<7)=0.8$，则 $P(3<X<5)$ 的值为________.

【答案】0.3

【解析】$X\sim N(5,\sigma^2)$，$P(X<7)=0.8$，则 $P(X\geq 7)=0.2$，$P(5<X<7)=0.3$，

$\therefore P(3<X<5)=0.3$.

14．已知 $\left(3x^2+\dfrac{2a}{x^3}\right)^5$ 的展开式中所有项的系数之和为 32，则展开式中的常数项为________.

【答案】270

【解析】$x=1$，$(3+2a)^5=32$，$\therefore 3+2a=2$，$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$.

$\left(3x^2+\dfrac{2a}{x^3}\right)^5$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_5^r(3x^2)^{5-r}\left(\dfrac{2a}{x^3}\right)^r=C_5^r3^{5-r}(2a)^rx^{10-2r-3r}$

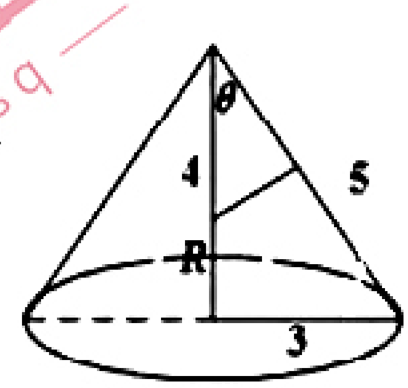
$=C_5^r3^{5-r}(2a)^rx^{10-5r}$，$r=2$，$C_5^23^3(2a)^2=10\times 27\times 1=270$.

15．已知圆锥的母线长为 5，侧面积为 15π，则该圆锥的内切球的体积为________.

【答案】$\dfrac{9}{2}\pi$

【解析】$\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot l=15\pi$，$\therefore r=3$，设内切球半径为 R，

$\sin\theta=\dfrac{R}{4-R}=\dfrac{3}{5}$，$\therefore R=\dfrac{3}{2}$，$V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{27}{8}=\dfrac{9}{2}\pi$.



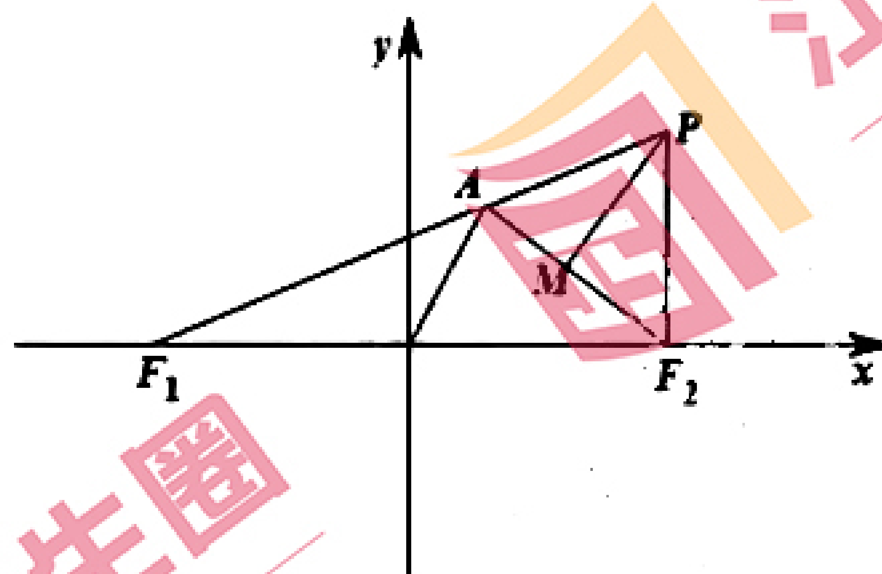
16．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在 C 上，且

$PF_2\perp x$ 轴，过点 F_2 作 $\angle F_1PF_2$ 的平分线的垂线，与直线 PF_1 交于点 A，若点 A 在圆

$O: x^2+y^2=a^2$上，则C的离心率为________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】方法一：$PF_2=\frac{b^2}{a}$，$PF_1=2a+\frac{b^2}{a}$，如图PM为角平分线和高，



$\triangle PAF_2$为等腰三角形，$\therefore PA=\frac{b^2}{a}$，$\therefore AF_1=2a$，$A$在$x^2+y^2=a^2$上，

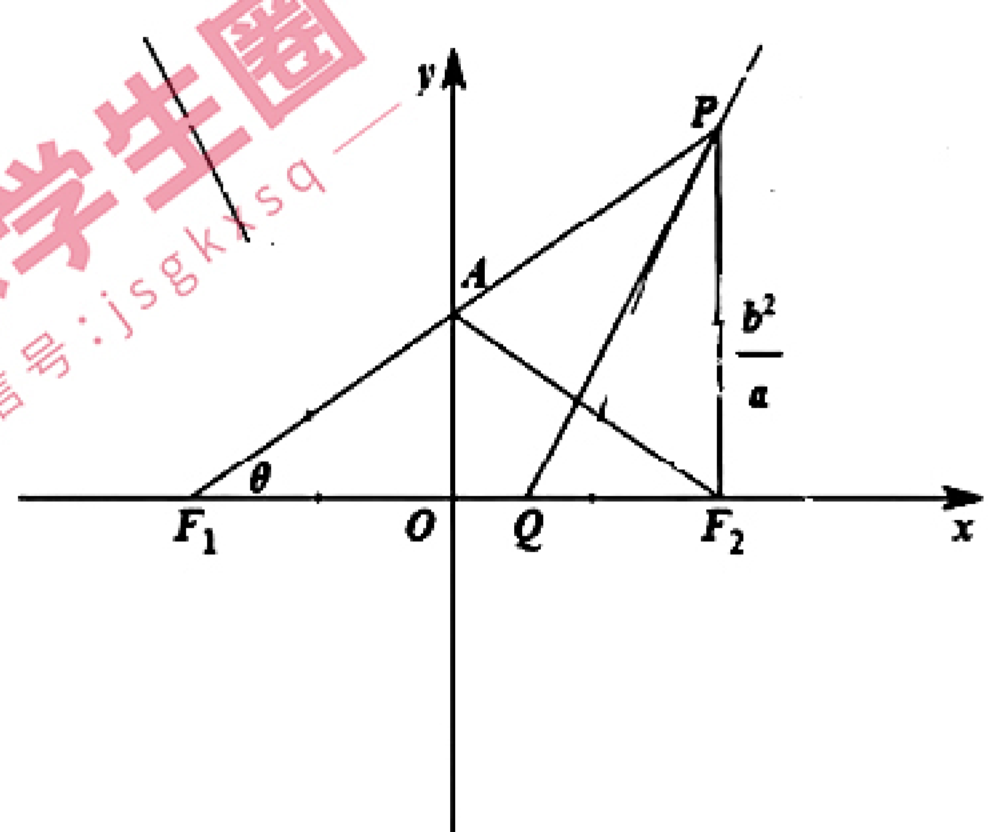
$\therefore OA=a$，$OF_1=c$，$\cos\angle PF_1F_2=\dfrac{2c}{2a+\frac{b^2}{a}}$，$\triangle AOF_1$中，

$a^2=4a^2+c^2-2\cdot 2a\cdot c=\dfrac{2c}{2a+\frac{b^2}{a}}$，$e=\sqrt{3}$

方法二：$\because PQ$平分$\angle F_1PF_2$，$PQ\perp AF_2$，$\therefore PA=PF_2$，$\therefore PF_1-PF_2=AF_1=2a$，

$OA=a$，$\therefore \cos\theta=\dfrac{4a^2+c^2-a^2}{2\cdot 2a\cdot c}=\dfrac{2c}{2a+\frac{b^2}{a}}\Rightarrow(3+e^2)(1+e^2)=8e^2$，

$(e^2-3)(e^2-1)=0$，$\therefore e^2=3$，$e=\sqrt{3}$.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且过点$\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

（1）求C的标准方程；

（2）过点$(-1,0)$的直线l与C交于A,B两点，当$AB=\frac{16}{5}$时，求直线l的方程.

【解析】

（1）由题意知$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ \frac{2}{a^2}+\frac{3}{2b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$

$\therefore$椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）l斜率不为0时，设直线l方程为$x=my-1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\begin{cases}x=my-1\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}\Rightarrow(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

$\Delta=36m^2+36(3m^2+4)=144(m^2+1)$，

$\therefore AB=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}=\frac{16}{5}\Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

且l斜率为0时，$AB\neq\frac{16}{5}$.

综上直线l的方程为：$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}y-1$，即$\sqrt{3}x\pm y+\sqrt{3}=0$.

18.（12 分）在①$2(S_n+S_{n-1})=a_n^2+1(n\geq 2)$，②$2\sqrt{S_n}=a_n+1$这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答下列问题.

已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，且__________，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，证明：$T_n<\dfrac{1}{2}$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【解析】

（1）若选①$2(S_n+S_{n-1})=a_n^2+1$①

$2(S_{n+1}+S_n)=a_{n+1}^2+1$②，

②−①$\Rightarrow 2(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}^2-a_n^2\Rightarrow a_{n+1}-a_n=2$，$n\geq 2$.

而①式中令$n=2\Rightarrow 2(1+a_2+1)=a_2^2+1\Rightarrow a_2=3$

$\therefore n=1$也满足$a_{n+1}-a_n=2$，$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

若选②，由$2\sqrt{S_n}=a_n+1$，$\therefore 4S_n=(a_n+1)^2$①

$4S_{n+1}=(a_{n+1}+1)^2$，②

$\therefore$ ②−①$\Rightarrow 4a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_n^2+2a_{n+1}-2a_n$

$\therefore (a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)-2(a_{n+1}+a_n)=0$

$\therefore a_{n+1}-a_n=2$，$\therefore a_n=2n-1$.

（2）$b_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$.

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)<\dfrac{1}{2}$.

19（12分）在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$b\cos C+c\cos B=3b\cos A-3c$.

（1）求$\cos B$；

（2）设角B的平分线交AC边于点D，且$BD=\sqrt{3}$，若$b=4\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积.

【解析】

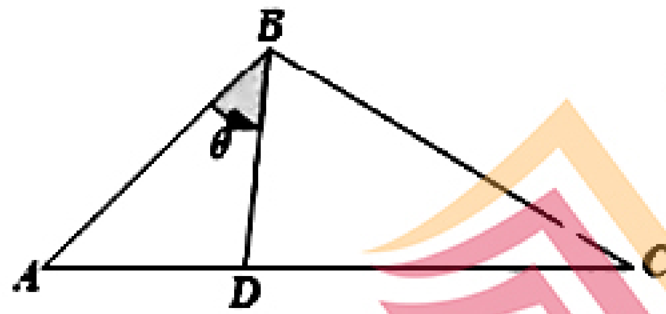
（1）$\sin B\cos C+\sin C\cos B=3\sin B\cos A-3\sin C$

$=3\sin B\cos A-3(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

$\sin(B+C)=-3\sin A\cos B\Rightarrow \sin A=-3\sin A\cos B$，

$\because \sin A>0$ ，$\therefore \cos B=-\dfrac{1}{3}$.

（2）$\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　$2\cos^2\theta-1=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\theta+\dfrac{1}{2}a\cdot\sqrt{3}\sin\theta=\dfrac{1}{2}ac\cdot\sin 2\theta$

$\Rightarrow \sqrt{3}a+\sqrt{3}c=2ac\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 3(a+c)=2ac$ ，

且$a^2+c^2-2ac\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=48\Rightarrow (a+c)^2-\dfrac{4}{3}ac=48$

$\therefore \dfrac{4}{9}a^2c^2-\dfrac{4}{3}ac=48\Rightarrow (ac-12)(ac+9)=0$ ，$\therefore ac=12$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 12\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$

20．（12分）设有甲、乙、丙三个不透明的箱子，每个箱中装有除颜色外都相同的5个球，其中甲箱有3个蓝球和2个黑球，乙箱有4个红球和1个白球，丙箱有2个红球和3个白球.摸球规则如下：先从甲箱中一次摸出2个球，若从甲箱中摸出的2个球颜色相同，则从乙箱中摸出1个球放入丙箱，再从丙箱中一次摸出2个球；若从甲箱中摸出的2个球颜色不同，则从丙箱中摸出1个球放入乙箱，再从乙箱中一次摸出2个球.

（1）若最后摸出的2个球颜色不同，求这2个球是从丙箱中摸出的概率；

（2）若摸出每个红球记2分，每个白球记1分，用随机变量X表示最后摸出的2个球的分数之和，求X的分布列及数学期望.

【解析】

（1）从甲箱中摸出2个球颜色相同的概率$P=\dfrac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{2}{5}$

记事件 A 为最后摸出的2个球颜色不同，事件 B 为这2个球是从丙箱中摸出的.

$$\therefore P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A)=\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}+\frac{4}{5}\times\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}\right)+\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\times\frac{C_5^1C_1^1}{C_6^2}+\frac{3}{5}\times\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}\right)=\frac{38}{75}$$

$$P(AB)=\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}+\frac{4}{5}\times\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}\right)=\frac{88}{375}，\therefore P(B\mid A)=\frac{\frac{88}{375}}{\frac{38}{75}}=\frac{44}{95}.$$

（2）X 的所有可能取值为 $2,3,4$.

$$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{C_4^2}{C_6^2}+\frac{4}{5}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{3}{25}$$

$$P(X=3)=\frac{38}{75}，$$

$$P(X=4)=\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}+\frac{4}{5}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}\right)+\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{C_5^2}{C_6^2}+\frac{3}{5}\times\frac{C_4^2}{C_6^2}\right)=\frac{28}{75}$$

$\therefore X$ 的分布列如下：

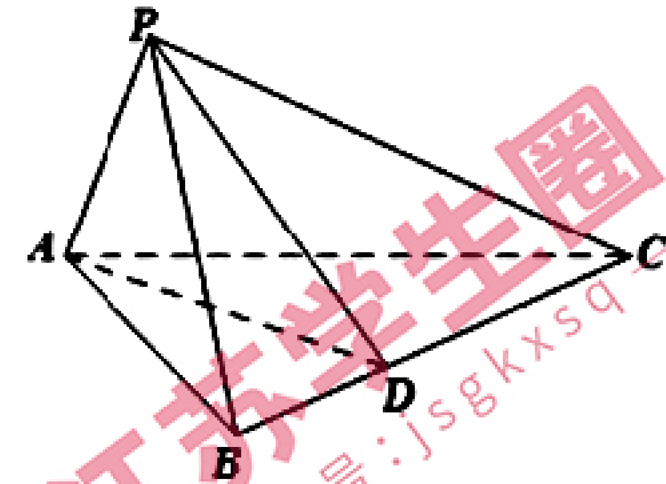
X	2	3	4
P	$\frac{3}{25}$	$\frac{38}{75}$	$\frac{28}{75}$

$$E(X)=\frac{18+114+112}{75}=\frac{244}{75}.$$

21.（12分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 PAB 是锐角三角形，$PA\perp BC$，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC.

（1）求证：$AB\perp BC$；

（2）设 $PA=PB=2$，$AC=4$，点 D 在棱 BC（异于端点）上，当三棱锥 $P-ABC$ 体积最大时，若二面角 $C-PA-D$ 大于 30°，求线段 BD 长的取值范围.



【解析】

（1）证明：过P作$PE\perp AB$于点E，$\because$平面$PAB\perp$平面ABC，

平面$PAB\cap$平面$ABC=AB$，$PE\perp AB$，$\therefore PE\perp$平面ABC，$\therefore PE\perp BC$，

又$\because BC\perp PA$，$PE\cap PA=P$，$\therefore BC\perp$平面PAB，$\therefore BC\perp AB$.

（2）设$AB=2a$，$BC=2b$，$\therefore 4a^2+4b^2=16$，$a^2+b^2=4$，

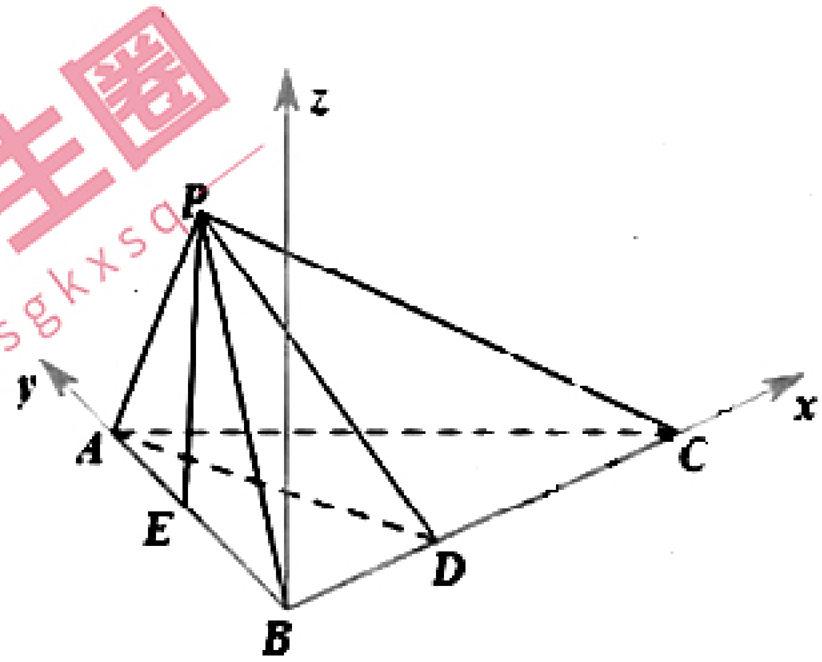
且$PE=\sqrt{4-a^2}$，$\therefore V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b\cdot\sqrt{4-a^2}=\dfrac{2}{3}ab^2=\dfrac{2}{3}a(4-a^2)$

令$f(a)=\dfrac{2}{3}a(4-a^2)$，$\therefore f'(a)=\dfrac{2}{3}(4-3a^2)=0\Rightarrow a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$0<a<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时，$f'(a)>0,f(a)\nearrow$；当$2>a>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时，$f'(a)<0,f(a)\swarrow$

$\therefore$当$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，即$AB=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$BC=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$时，V_{P-ABC}体积最大.

如图建系，



设$BD=m$，$\therefore D(m,0,0)$，$C\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3},0,0\right)$，$P\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$A\left(0,\right.$

$\overrightarrow{CA}=\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3},0\right)$，$\overrightarrow{PA}=\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$\overrightarrow{DA}=\left(-m,\frac{4\sqrt{3}}{3},0\right)$.

设平面CPA与平面PAD的一个法向量分别为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$$\begin{cases}-\frac{4\sqrt{6}}{3}x_1+\frac{4\sqrt{3}}{3}y_1=0\\ \frac{2\sqrt{3}}{3}y_1-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_1=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(1,\sqrt{2},1).$$

$$\begin{cases}\frac{2\sqrt{3}}{3}y_2-\frac{2\sqrt{6}}{3}z_2=0\\ -mx_2+\frac{4\sqrt{3}}{3}y_2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=\left(\frac{4\sqrt{6}}{3m},\sqrt{2},1\right).$$

设二面角$C-PA-D$大小为θ，

$$\therefore\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\left|\frac{4\sqrt{6}}{3m}+3\right|}{2\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{6}}{3m}\right)^2+3}}<\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 0<m<\frac{4\sqrt{6}}{9}.$$

22．（12分）已知函数$f(x)=a^2e^x-3ax+2\sin x-1$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）当$0<a<1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与两坐标轴围成的三角形面积的最大值；

（2）当$x=0$时，函数$f(x)$取得极值，求a的值.

【解析】

（1）$f'(x)=a^2e^x-3a+2\cos x$，$k=f'(0)=a^2-3a+2$，切点$(0,a^2-1)$

$\therefore f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程为$y=(a^2-3a+2)x+a^2-1$.

令$x=0\Rightarrow y=a^2-1$，令$y=0\Rightarrow x=\frac{1-a^2}{a^2-3a+2}=\frac{1+a}{2-a}$，

$\therefore$切线与两坐标轴围成三角形面积$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+a}{2-a}(1-a^2)=\frac{(1+a)(1-a^2)}{2(2-a)}=$ [illegible]

$\therefore g'(a)=\dfrac{(a+1)(2a-1)(a-3)}{2(2-a)^2}$，令$g'(a)=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，$g'(a)>0, g(a)\nearrow$；当$\dfrac{1}{2}<a<1$时，$g'(a)<0, g(a)\swarrow$，

$\therefore g(a)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{4}}{3}=\dfrac{3}{8}$

（2）$f'(x)=a^2e^x-3a+2\cos x$，$\because x=0$时，$f(x)$取得极值.

$\therefore f'(0)=0\Rightarrow a^2-3a+2=0$，$\therefore a=1$或$2$（必要性）

当$a=1$时，$f(x)=e^x-3x+2\sin x-1$，

$f'(x)=e^x-3+2\cos x$，$f''(x)=e^x-2\sin x$.

当$x\in(-1,1)$时，$f''(x)>0$，$\therefore f'(x)\nearrow$，注意到$f'(0)=0$，

$\therefore$当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$，$f(x)\swarrow$；当$0<x<1$时，$f'(x)>0$，$f(x)\nearrow$.

$\therefore f(x)$在$x=0$处取得极小值，符合.

当$a=2$时，$f(x)=4e^x-6x+2\sin x-1$，

$f'(x)=4e^x-6+2\cos x$，$f''(x)=4e^x-2\sin x$，

当$x\in(-1,1)$时，$f''(x)>0$，当$a=1$时，同理可说明$f(x)$在$x=0$处取得极小值，也符合

综上：$a=1$或2.

[illegible] $x\in(0,1)$时，$e^x-2\sin x>x+1-2x=1-x>0$