绝密★启用前

24届高三年级TOP二十名校调研考试七

数　　学

全卷满分150分，考试时间120分钟

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名，准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x|3^x<27,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<2\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{x|-2<x<3\}$

2. 已知复数 z 满足 $z(3-4i)=4-2i$，则 $|z|=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

3. 若圆锥的母线长为6，其侧面展开图的面积为 12π，则这个圆锥的体积为

A. 24π　　B. 8π　　C. $16\sqrt{2}\pi$　　D. $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

4. 已知函数 $f(x)=ax+2\cos x(a\in\mathbf{R})$，则"$a>2$"是"$f(x)$在区间$(\pi,+\infty)$上单调递增"的

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

5. 设 $a=\log_{0.5}0.6$，$b=0.25^{-0.3}$，$c=0.6^{-0.6}$，则 a,b,c 的大小关系是

A. $b>a>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

6. 若 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{8}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{12}\right)$ 的值为

A. $-\frac{31\sqrt{2}}{50}$　　B. $\frac{31\sqrt{2}}{50}$　　C. $-\frac{17\sqrt{2}}{50}$　　D. $\frac{17\sqrt{2}}{50}$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n+a_n=1$，设 $b_n=\frac{n-\lambda}{a_n}$，若数列 $\{b_n\}$ 是递增数列，则 λ 的取值范围是

A. $(-\infty,2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-\infty,3)$　　D. $(3,+\infty)$

8. 在$\triangle ABC$中，点D是边BC的中点，且$AD=4$，点E满足$\overrightarrow{BE}=\sin^2\theta\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\cos^2\theta\cdot\overrightarrow{BC}$ $(\theta\in\mathbf{R})$，则$(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC})\cdot\overrightarrow{EA}$的最小值为

A. -10　　B. -8　　C. -6　　D. -4

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知m、n、l是三条不重合的直线，α、β是两个不重合的平面，则下列说法正确的是

A. 若$\alpha /\!/ \beta$，$m\subset\alpha$，则$m /\!/ \beta$

B. 若$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，$\alpha /\!/ \beta$，则$m /\!/ n$

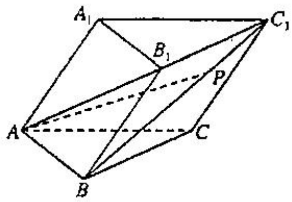
C. 若$m /\!/ n$，$m\perp\alpha$，则$n\perp\alpha$

D. 若m、n是异面直线，$m /\!/ \alpha$，$n /\!/ \alpha$，$l\perp m$且$l\perp n$，则$l\perp\alpha$

10. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$2S_5$，$3S_7$，$4S_8$成等差数列，则数列$\{a_n\}$的公比可能为

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -1

11. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$，$AB=AC=AA_1=1$，$P$是线段$BC_1$上的点，且$BP=2PC_1$，则下列说法正确的是



A. $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$

B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-\frac{1}{2}$

C. $AP=\frac{\sqrt{15}}{3}$

D. 直线AB_1与BC_1所成角的余弦值为$\frac{1}{6}$

12. 已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，且$f(x)-f(-x)=4x$，$f'(1+x)=f'(1-x)$，则下列说法正确的是

A. 函数$y=f(x)-2x$为偶函数　　B. $f'(x)$的图象关于直线$x=-1$对称

C. $f'(2\,022)=4$　　D. $\sum\limits_{i=1}^{199}f'\left(\frac{i}{50}\right)=398$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若命题"$\exists x\in\mathbf{R}$，$(a^2-1)x^2+(a-1)x-1\geqslant 0$"为假命题，则$a$的取值范围为________.

14. 已知函数$y=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)(\omega>0)$的图象与$y=-2$的图象的两相邻公共点间的距离为$\pi$，将$y=2\sin(\omega x)$的图象向左平移$\varphi(\varphi>0)$个单位长度得到$y=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)$的图象，则$\varphi$的最小值为________.

15. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n(n+2)}, & n=2k-1, k\in\mathbf{N}^*,\\ 2a_{n-1}, & n=2k, k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$则$S_{12}=$________.

16. 在三棱锥$P-ABC$中，$\triangle ABC$是等边三角形，$PA\perp$平面ABC，$PA=4$，$AB=2\sqrt{2}$，D是AC的中点，球O为三棱锥$P-ABD$的外接球，G是球O上的一点，则三棱锥$G-PDC$体积的最大值是________.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分10分）

已知数列$\{a_n\}$是等差数列，其前n项和为S_n，且$2a_2+a_4=13$，$S_7=49$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=a_n+2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18.（本小题满分12分）

在锐角$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$(a-b)(\sin A+\sin B)=(\sin C-\sin B)(a\cos B+b\cos A)$.

(1)求角A的大小；

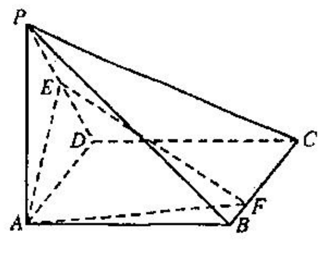
(2)若$\triangle ABC$外接圆的半径为$\sqrt{3}$，求$\frac{b^2+c^2}{a^2}$的取值范围.

19.（本小题满分12分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB$，点E是棱PD的中点，点F是棱BC上的一点.

(1)求证：平面$AEF\perp$平面PDC；

(2)若$CF=3FB$，求平面AEF与平面PBC夹角的余弦值.



20.(本小题满分12分)

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_2=27,a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$.

(1)证明:数列$\{a_{n+1}-3a_n\}$是等比数列;

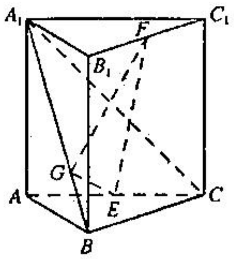
(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

21.(本小题满分12分)

如图,在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$AB=AA_1=BC=4$,平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1,点E,F分别是棱AC,B_1C_1的中点,点G是线段A_1B上的一点.

(1)求证:$EF\perp BC$;

(2)若直线A_1C与平面EFG所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$,求$\frac{A_1G}{GB}$的值.



22.(本小题满分12分)

已知函数$f(x)=x\ln x-a(2x^2+1)(a\in\mathbf{R})$.

(1)若$a=-1$,求$f(x)$的图象在$x=1$处的切线方程;

(2)若$f(x)$有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$.

①求a的取值范围;

②求证:$3x_2-x_1>\frac{1}{a}-2$.

24 届高三年级 TOP 二十名校调研考试七·数学

参考答案、提示及评分细则

1. A　由题意知 $A=\{x|3^x<27,x\in\mathbf{N}\}=\{0,1,2\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<2\}=\{-1,0,1\}$，所以 $A\cup B=\{-1,0,1,2\}$. 故选 A.

2. B　因为复数 z 满足 $z(3-4i)=4-2i$，所以 $z=\frac{4-2i}{3-4i}=\frac{(4-2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i$，所以 $\bar{z}=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$，所以 $|\bar{z}|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 B.

3. D　由题可知圆锥的侧面展开图扇形的半径 $l=6$，设底面圆的半径为 r，则 $\frac{1}{2}\times6\times2\pi r=12\pi$，解得 $r=2$，所以圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=4\sqrt{2}$，该圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times2^2\pi\times4\sqrt{2}=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. 故选 D.

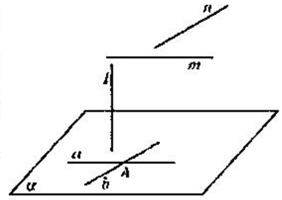
4. B　若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)=a-2\sin x\geqslant0$ 在 $(\pi,+\infty)$ 上恒成立，所以 $a-2\geqslant0$，解得 $a\geqslant2$. 所以“$a>2$”是“$f(x)$ 在区间 $(\pi,+\infty)$ 上单调递增”的充分不必要条件. 故选 B.

5. C　因为 $y=\log_{0.5}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\log_{0.5}1<\log_{0.5}0.6<\log_{0.5}0.5$，即 $0<a<1$. 因为 $y=x^{0.6}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $0.25^{-0.3}=0.5^{-0.6}=2^{0.6}$，$0.6^{-0.6}=\left(\frac{5}{3}\right)^{0.6}$，又 $2>\frac{5}{3}>1$，所以 $2^{0.6}>\left(\frac{5}{3}\right)^{0.6}>1^{0.6}$，故 $b>c>1$，所以 $b>c>a$. 故选 C.

6. D　因为 $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{8}{5}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{24}{25}$，$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1=\frac{7}{25}$，所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left[\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{24}{25}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{7}{25}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{17\sqrt{2}}{50}$. 故选 D.

7. C　当 $n=1$ 时，$S_1+a_1=2a_1=1$，解得 $a_1=\frac{1}{2}$；当 $n\geqslant2$ 时，由 $S_n+a_n=1$，得 $S_{n-1}+a_{n-1}=1$，两式相减得 $2a_n-a_{n-1}=0$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$，所以 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，所以 $a_n=\frac{1}{2^n}$，所以 $b_n=\frac{n-\lambda}{a_n}=(n-\lambda)\cdot2^n$. 因为数列 $\{b_n\}$ 是递增数列，所以 $b_{n+1}>b_n$ 对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，即 $(n+1-\lambda)\cdot2^{n+1}>(n-\lambda)\cdot2^n$，即 $\lambda<n+2$ 恒成立，因为 $n=1$ 时，$n+2$ 取得最小值 3，故 $\lambda<3$，即 λ 的取值范围是 $(-\infty,3)$. 故选 C.

8. B　因为 $\overrightarrow{BE}=\sin^2\theta\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\cos^2\theta\cdot\overrightarrow{BC}(\theta\in\mathbf{R})$，所以 $\overrightarrow{BE}=\sin^2\theta\cdot\overrightarrow{BA}+\cos^2\theta\cdot\overrightarrow{BD}$，又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以点 E 在线段 AD 上，所以 $(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC})\cdot\overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EA}$. 设 $ED=x(0\leqslant x\leqslant4)$，所以 $(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC})\cdot\overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EA}=-2x(4-x)=2(x-2)^2-8\geqslant-8$，当且仅当 $x=2$ 时，等号成立，所以 $(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC})\cdot\overrightarrow{EA}$ 的最小值为 -8. 故选 B.



9. ACD　若 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，则 $m/\!/\beta$ 成立，故 A 正确；两个平行平面内的两条直线位置是平行或异面，即 $m/\!/n$ 不一定正确，故 B 错误；若 $m/\!/n$，且 $m\perp\alpha$，则 $n\perp\alpha$，故 C 正确；如图，因为 $m/\!/\alpha$，所以存在直线 a，$a\subset\alpha$ 且满足 $a/\!/m$，又 $l\perp m$，所以 $l\perp a$，同理存在直线 b，$b\subset\alpha$ 且满足 $b/\!/n$，又 $l\perp n$，所以 $l\perp b$，因为 m、n 是异面直线，所以 a 与 b 相交，设 $a\cap b=A$，又 a，$b\subset\alpha$，所以 $l\perp\alpha$，故 D 正确. 故选 ACD.

10. AC　因为 $2S_5$，$3S_7$，$4S_8$ 成等差数列，所以 $6S_7=2S_5+4S_8$，即 $6(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)=2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+4(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8)$，整理得 $a_6+a_7-2a_8=0$，又 $a_6\neq0$，设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，所以 $2q^2-q-1=0$，解得 $q=1$ 或 $q=-\frac{1}{2}$. 故选 AC.

11. BCD　由题意知 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$，故 A 错误；记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，所以 $\overrightarrow{BC_1}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC_1}=\boldsymbol{a}\cdot(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，故 B 正确；$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$，所以 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\boldsymbol{a}^2+\frac{4}{9}\boldsymbol{b}^2+\frac{4}{9}\boldsymbol{c}^2+\frac{4}{9}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{4}{9}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\frac{8}{9}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\times1\times1\times\frac{1}{2}+\frac{8}{9}\times1\times1\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，故 C 正确；由 $\overrightarrow{AB_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC_1}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，所以 $|\overrightarrow{AB_1}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{BC_1}|=\sqrt{(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}=\sqrt{3}$，又 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-1+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{1}{6}$，所以直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{1}{6}$，故 D 正确. 故选 BCD.

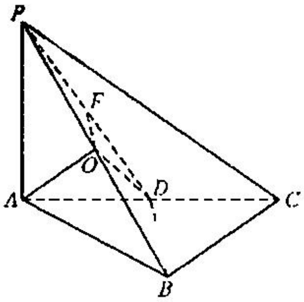
12. ABD　因为 $f(x)-f(-x)=4x$，所以 $f(x)-2x=f(-x)-2(-x)$，所以函数 $y=f(x)-2x$ 为偶函数，故 A 正确；因为 $f(x)-f(-x)=4x$，两边求导得 $f'(x)+f'(-x)=4$. 令 $x=0$，得 $f'(0)=2$. 因为 $f'(1+x)=f'(1-x)$，所以 $f'(2+x)=f'(-x)=4-f'(x)$，所以 $f'(1+x)=4-f'(x-1)$，$f'(1-x)=4-f'(-x-1)$，所以 $4-f'(x-1)=4-f'(-x-1)$，即 $f'(x-1)=f'(-x-1)$，所以 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，故 B 正确；因为 $f'(2+x)=4-f'(x)$，又 $f'(0)=2$，所以 $f'(2)=4-2=2$，所以 $f'(4+x)=4-f'(x+2)=4-[4-f'(x)]=f'(x)$，所以 $f'(x)$ 是周期为 4 的周期函数，所以 $f'(2\,022)=f(2)=2$，故 C 错误；因为 $f'(2+x)=4-f'(x)$，所以 $f'(2-x)=4-f'(-x)$，所以 $f'(2+x)+f'(2-x)=4-f'(x)+4-f'(-x)=4$，所以 $f'(x)+f'(4-x)=4$，所以 $\sum_{i=1}^{199}f'\left(\frac{i}{50}\right)=f'\left(\frac{1}{50}\right)+f'\left(\frac{2}{50}\right)+\cdots+f'\left(\frac{199}{50}\right)$，又 $\sum_{i=1}^{199}f'\left(\frac{i}{50}\right)=f'\left(\frac{199}{50}\right)+f'\left(\frac{198}{50}\right)+\cdots+f'\left(\frac{1}{50}\right)$，所以 $\sum_{i=1}^{199}f'\left(\frac{i}{50}\right)=\frac{f'\left(\frac{1}{50}\right)+f'\left(\frac{199}{50}\right)+f'\left(\frac{2}{50}\right)+f'\left(\frac{198}{50}\right)+\cdots+f'\left(\frac{199}{50}\right)+f'\left(\frac{1}{50}\right)}{2}=398$，故 D 正确. 故选 ABD.

13. $\left(-\frac{3}{5},1\right]$　由题意可知，命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$(a^2-1)x^2+(a-1)x-1<0$”为真命题. 当 $a^2-1=0$ 时，可得 $a=\pm1$. 若 $a=1$，则有 $-1<0$，符合题意；若 $a=-1$，则有 $-2x-1<0$，解得 $x>-\frac{1}{2}$，不符合题意；当 $a^2-1\neq0$ 时，则 $\begin{cases}a^2-1<0,\\ \Delta=(a-1)^2+4(a^2-1)<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{5}<a<1$. 综上，a 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{5},1\right]$.

14. $\frac{7\pi}{20}$　由已知 $y=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)(\omega>0)$ 的图象与 $y=-2$ 的图象的两相邻公共点间的距离为 π，得 $T=\pi$，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，所以 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$. 又 $y=2\sin 2x=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$，其向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度得 $y=2\cos\left[2(x+\varphi)-\frac{\pi}{2}\right]=2\cos\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$，则 $2\varphi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{5}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{7\pi}{20}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，φ 取最小值 $\frac{7\pi}{20}$.

15. $\frac{18}{13}$　当 $n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*$，$a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，所以 $S_{12}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=a_1+2a_1+a_3+2a_3+a_5+2a_5+a_7+2a_7+a_9+2a_9+a_{11}+2a_{11}=3(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})=3\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)=\frac{18}{13}$.

16. $2\sqrt{3}$　在正△ABC 中，D 为 AC 的中点，则 $BD\perp AC$，又 $PA\perp$ 平面 ABC，$BD\subset$ 平面 ABC，则 $BD\perp PA$，又 $PA\cap AC=A$，PA、$AC\subset$ 平面 PAC，则 $BD\perp$ 平面 PAC，又 $PD\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp PD$，因为 $PA\perp$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，则 $PA\perp AB$，所以 PB 的中点到点 A,B,D,P 的距离相等，即三棱锥 $P-ABD$ 外接球的球心为 PB 的中点 O. 设球 O 的半径为 R，则 $4R^2=PA^2+AB^2=24$，所以 $R=\sqrt{6}$，因为△PAD 外接圆的圆心为 PD 的中点，设为 F，连接 OF，因为 O,F 分别为 PB,PD 的中点，则 $OF/\!/BD$，故 $OF\perp$ 平面 PAC，如图. 则有 $OF=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{6}}{2}$，即 O 到平面 PDC 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，因此 G 到平面 PDC 距离的最大值为 $R+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，又 $S_{\triangle PDC}=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，所以三棱锥 $G-PDC$ 体积的最大值是 $\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{3}$.



17. 解：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，又 $2a_2+a_4=13$，$S_7=49$，

所以 $\begin{cases}2(a_1+d)+a_1+3d=13,\\7a_1+\frac{7\times6d}{2}=49,\end{cases}$ ………………………… 2 分

解得 $a_1=1,d=2$， ………………………… 4 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$. ………………………… 5 分

(2)由(1)知 $b_n=a_n+2^{a_n}=2n-1+2^{2n-1}$， ………………………… 6 分

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(1+2)+(3+2^3)+(5+2^5)+\cdots+(2n-1+2^{2n-1})$

$=(1+3+5+\cdots+2n-1)+(2+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1})$

$=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{2\times(1-4^n)}{1-4}=\frac{2^{2n+1}-2}{3}+n^2$. ………………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $(a-b)(\sin A+\sin B)=(\sin C-\sin B)(a\cos B+b\cos A)$，由正弦定理得 $(\sin A-\sin B)(\sin A+\sin B)=(\sin C-\sin B)(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=(\sin C-\sin B)\sin(A+B)=(\sin C-\sin B)\sin C$，由正弦定理得 $(a-b)(a+b)=(c-b)c$，所以 $b^2+c^2-a^2=bc$， ………………………… 3 分

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$， ………………………… 4 分

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 5 分

(2)由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\sqrt{3}$，所以$a=2\sqrt{3}\sin A=3$，$b=2\sqrt{3}\sin B$，$c=2\sqrt{3}\sin C$，

所以$\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{(2\sqrt{3}\sin B)^2+(2\sqrt{3}\sin C)^2}{9}=\frac{4\sin^2 B+4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+B\right)}{3}=1+\frac{1}{3}(2\sin^2 B+\sqrt{3}\sin 2B)=\frac{4}{3}+$

$\frac{1}{3}(\sqrt{3}\sin 2B-\cos 2B)=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)$， ………………………… 8分

因为△ABC是锐角三角形，所以$A+B>\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{2}>B>\frac{\pi}{6}$， ………………………… 9分

所以$2B-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，所以$\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，

所以$\frac{b^2+c^2}{a^2}\in\left(\frac{5}{3},2\right]$，即$\frac{b^2+c^2}{a^2}$的取值范围是$\left(\frac{5}{3},2\right]$. ………………………… 12分

19.(1)证明：因为$PA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp CD$. ………………………… 1分

因为底面$ABCD$为正方形，所以$AD\perp CD$，

又$AD\cap PA=A$，AD，$PA\subset$平面PAD，所以$CD\perp$平面PAD， ………………………… 2分

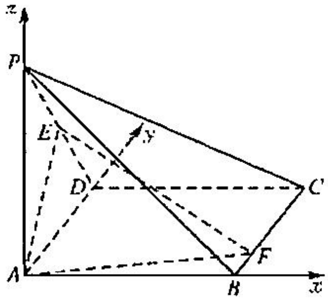
又$AE\subset$平面PAD，所以$CD\perp AE$. ………………………… 3分

在△PAD中，$PA=AD$，E是棱PD的中点，所以$PD\perp AE$， ………………………… 4分

又$PD\cap CD=D$，PD，$CD\subset$平面PDC，所以$AE\perp$平面PDC， ………………………… 5分

又$AE\subset$平面AEF，所以平面$AEF\perp$平面PDC. ………………………… 6分

(2)解：以A为坐标原点，AB，AD，AP所在的直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，如图所示. 不妨设$AB=2$，所以$A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$E(0,1,1)$，$F\left(2,\frac{1}{2},0\right)$，设平面$AEF$的一个法向量为$n=(x,y,z)$. 又$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{AF}=\left(2,\frac{1}{2},0\right)$，所以



$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AE}=y+z=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AF}=2x+\frac{1}{2}y=0.\end{cases}$ 令$y=-4$，解得$x=1$，$z=4$，所以平面AEF的一个

法向量为$n=(1,-4,4)$. ………………………… 8分

设平面PBC的一个法向量为$m=(a,b,c)$. 又$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-2,0,2)$，所以

$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{BC}=2b=0,\\ m\cdot\overrightarrow{BP}=-2a+2c=0,\end{cases}$ 令$a=1$，解得$b=0$，$c=1$，所以平面PBC的一个法向量为$m=(1,0,1)$. … 10分

设平面AEF与平面PBC的夹角为θ，

所以$\cos\theta=|\cos\langle n,m\rangle|=\frac{|n\cdot m|}{|n||m|}=\frac{1+4}{\sqrt{1+16+16}\times\sqrt{1+0+1}}=\frac{5\sqrt{66}}{66}$，

即平面AEF与平面PBC夹角的余弦值为$\frac{5\sqrt{66}}{66}$. ………………………… 12分

20.(1)证明：因为$a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$，所以$a_{n+2}-3a_{n+1}=3a_{n+1}-9a_n=3(a_{n+1}-3a_n)$，

又$a_2-3a_1=27-3\times3=18$，

所以$\{a_{n+1}-3a_n\}$是以18为首项，3为公比的等比数列. ………………………… 4分

(2)解：由(1)知$a_{n+1}-3a_n=18\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n+1}$， ………………………… 5分

所以$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=2$，又$\frac{a_1}{3}=1$，所以$\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$是以1为首项，2为公差的等差数列， ………………………… 7分

所以$\frac{a_n}{3^n}=1+2(n-1)=2n-1$,所以 $a_n=(2n-1)\cdot 3^n$. ………………………………………… 8 分

所以 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=1\times3+3\times3^2+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$,

所以 $3S_n=1\times3^2+3\times3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n+1}$,

所以 $-2S_n=3+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\cdot 3^n-(2n-1)\cdot 3^{n+1}=3+2\times\frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\cdot 3^{n+1}$

$=-6-(2n-2)\cdot 3^{n+1}$, ………………………………………… 10 分

所以 $S_n=(n-1)\cdot 3^{n+1}+3$. ………………………………………… 12 分

21.(1)证明:连接 AB_1,如图所示.在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$BB_1\perp$平面 ABC,又 $AB,BC\subset$平面 ABC,所以 $BB_1\perp AB,BB_1\perp BC$,又 $AB=AA_1$,所以四边形 ABB_1A_1 是正方形,所以 $AB_1\perp A_1B$. ……… 1 分

又平面 $A_1BC\perp$平面 ABB_1A_1,平面 $A_1BC\cap$平面 $ABB_1A_1=A_1B$,$AB_1\subset$平面 ABB_1A_1,

所以 $AB_1\perp$平面 A_1BC, ………………………………………… 3 分

又 $BC\subset$平面 A_1BC,所以 $AB_1\perp BC$,又 $AB_1\cap BB_1=B_1$,$AB_1,BB_1\subset$平面 ABB_1A_1,

所以 $BC\perp$平面 ABB_1A_1. ………………………………………… 4 分

取 A_1B_1 的中点 H,连接 AH,FH,如图所示.因为 H 是 A_1B_1 的中点,F 是 B_1C_1 的中点,

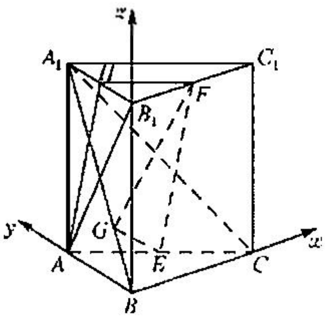
所以 $FH\parallel A_1C_1$,$FH=\frac{1}{2}A_1C_1$,

又 E 是棱 AC 的中点,所以 $FH\parallel AE$,$FH=AE$,

所以四边形 $AEFH$ 是平行四边形,所以 $EF\parallel AH$. ………………………………………… 5 分

因为 $BC\perp$平面 ABB_1A_1,$AH\subset$平面 ABB_1A_1,

所以 $BC\perp AH$,所以 $EF\perp BC$. ………………………………………… 6 分



(2)解:因为 $BC\perp$平面 ABB_1A_1,$AB\subset$平面 ABB_1A_1,所以 $BC\perp AB$,又 $BB_1\perp AB$,$BB_1\perp BC$,所以以 B 为坐标原点,BC,BA,BB_1 所在的直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,如图所示.所以 $B(0,0,0)$,$C(4,0,0)$,$A_1(0,4,4)$,$A(0,4,0)$,$B_1(0,0,4)$,$C_1(4,0,4)$,所以 $E(2,2,0)$,$F(2,0,4)$,所以$\overrightarrow{EF}=(0,-2,4)$,设$\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BA_1}=(0,4\lambda,4\lambda)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,所以$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BE}=(-2,4\lambda-2,4\lambda)$.设平面 EFG 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=-2y+4z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=-2x+(4\lambda-2)y+4\lambda z=0,\end{cases}$令 $z=1$,解得 $y=2$,$x=6\lambda-2$,所以平面 EFG 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(6\lambda-2,2,1)$. ………………………………………… 8 分

又$\overrightarrow{CA_1}=(-4,4,4)$,设直线 A_1C 与平面 EFG 所成角的大小为 θ,

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CA_1}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CA_1}|}=\frac{|4(5-6\lambda)|}{\sqrt{4^2+4^2+4^2}\times\sqrt{(6\lambda-2)^2+2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$, ……… 10 分

解得 $\lambda=\frac{1}{3}$或 $\lambda=-\frac{11}{12}$(舍),所以$\frac{A_1G}{GB}=2$. ………………………………………… 12 分

22.解:(1)若 $a=-1$,则 $f(x)=x\ln x+2x^2+1$,所以 $f'(x)=\ln x+1+4x$, ……………………… 1 分

所以 $f'(1)=1+4=5$,又 $f(1)=2+1=3$, ………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-3=5(x-1)$,即 $5x-y-2=0$. ……………………… 3 分

(2)①由题意知 $f'(x)=\ln x+1-4ax$.

令 $g(x)=f'(x)=\ln x-4ax+1$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-4a$.

因为 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，所以 $g(x)=0$ 有两个不等正实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$.

若 $a\leqslant 0$，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，不符合题意；……………… 4 分

若 $a>0$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{4a}$，所以当 $0<x<\frac{1}{4a}$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>\frac{1}{4a}$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{4a},+\infty\right)$ 上单调递减.

所以 $x=\frac{1}{4a}$ 时，$g(x)$ 取得极大值，即最大值为 $g\left(\frac{1}{4a}\right)=-\ln(4a)$，

所以 $g\left(\frac{1}{4a}\right)=-\ln(4a)>0$，解得 $0<a<\frac{1}{4}$. ……………… 5 分

当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$g\left(\frac{1}{4a}\right)>0$，又 $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-4a}{e}<0$，所以 $g\left(\frac{1}{4a}\right)\cdot g\left(\frac{1}{e}\right)<0$，由零点存在性定理知：存在唯一的 $x_1\in\left(\frac{1}{e},\frac{1}{4a}\right)$，使得 $g(x_1)=0$.

又 $g\left(\frac{1}{a^2}\right)=\ln\frac{1}{a^2}-4a\cdot\frac{1}{a^2}+1=-2\ln a-\frac{4}{a}+1$，令 $\mu(x)=-2\ln x-\frac{4}{x}+1$，所以 $\mu'(x)=-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=\frac{4-2x}{x^2}$，所以当 $0<x<2$ 时，$\mu'(x)>0$，当 $x>2$ 时，$\mu'(x)<0$，所以 $\mu(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\mu(a)=-2\ln a-\frac{4}{a}+1\leqslant\mu(2)=-2\ln 2-1<0$，所以 $g\left(\frac{1}{a^2}\right)<0$，

所以 $g\left(\frac{1}{4a}\right)\cdot g\left(\frac{1}{a^2}\right)<0$，由零点存在性定理知：存在唯一的 $x_2\in\left(\frac{1}{4a},\frac{1}{a^2}\right)$，使得 $g(x_2)=0$.

所以当 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$g(x)=0$ 有两个不等正实根 x_1,x_2.

综上，a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$. ……………… 7 分

②证明：由①知 $0<a<\frac{1}{4}$，且 $0<x_1<\frac{1}{4a}<x_2$，所以 $\frac{1}{4a}>1$，

因为 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ 上为增函数，及 $g(1)=1-4a>0$，所以 $x_1<1$，

又 $x_2>\frac{1}{4a}$，所以 $x_2-x_1>\frac{1}{4a}-1$. ……………… 9 分

因为 $g(x_1)=0$，$g(x_2)=0$，所以 $\ln x_1-4ax_1+1=0$，$\ln x_2-4ax_2+1=0$，

所以 $\ln x_1-\ln x_2=4a(x_1-x_2)$，所以 $\frac{1}{4a}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$.

令 $h(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}(0<x<1)$，所以 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，因为 $x_1<x_2$，所以 $\frac{x_1}{x_2}<1$，所以 $h\left(\frac{x_1}{x_2}\right)<h(1)=0$，所以 $\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}<0$，所以 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，所以 $\frac{1}{4a}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，所以 $x_1+x_2>\frac{1}{2a}$. ……………… 11 分

所以 $3x_2-x_1=(x_1+x_2)+2(x_2-x_1)>\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}-2=\frac{1}{a}-2$. ……………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。